

2016 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

[1] k を実数とする。 xy 平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q を持つとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また、原点を O とする。

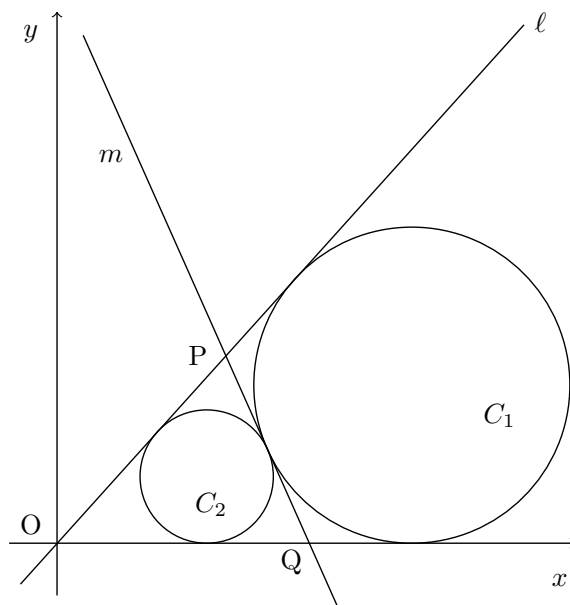
- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) の範囲を動くとき、 $\triangle OPQ$ の重心 G の軌跡を求めよ。
- (3) $\triangle OPQ$ の面積を S とするとき、 S^2 を k を用いて表せ。
- (4) k が (1) の範囲を動くとする。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるような k の値と、そのときの重心 G の座標を求めよ。

〔 2 〕 xy 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を ℓ とする。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。図で示すように、円 C_1 , C_2 を以下の (i)~(iv) で定める。

- (i) 円 C_1 は直線 ℓ および x 軸の正の部分と接する。
- (ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり、原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。
- (iii) 円 C_2 は直線 ℓ , x 軸の正の部分, および円 C_1 と接する。
- (iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり、原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1 > d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち、 x 軸、直線 ℓ と異なる直線を m とし、直線 m と直線 ℓ , x 軸との交点をそれぞれ P , Q とする。

- (1) 円 C_1 , C_2 の半径を $\sin \theta$, $\cos \theta$ を用いて表せ。
- (2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき、線分 PQ の長さの最大値を求めよ。
- (3) (2) の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。



〔 3 〕 四面体 OABC において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき等式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

が成り立つとする。 t は実数の定数で、 $0 < t < 1$ を満たすとする。線分 OA を $t : 1 - t$ に内分する点を P とし、線分 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を Q とする。また、線分 PQ の中点を M とする。

- (1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ。
- (2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき、線分 OB の長さを求めよ。
- (3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき、 $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は合同であることを示せ。

〔 4 〕 関数 $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ ($x \geq 0$) について次の問いに答えよ。

(1) $f'(a) = 0$, $f''(b) = 0$ を満たす a , b を求め, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ であることは証明なしで用いてよい。

(2) $k \geq 0$ のとき $V(k) = \int_0^k xe^{-2x} dx$ を k を用いて表せ。

(3) (1) で求めた a , b に対して曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

〔 5 〕 $\triangle PQR$ において $\angle RPQ = \theta$, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ とする。点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次で定める。

$$P_1 = P, \quad P_2 = Q, \quad P_n P_{n+2} = P_n P_{n+1}$$

ただし、点 P_{n+2} は線分 $P_n R$ 上にあるものとする。実数 θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

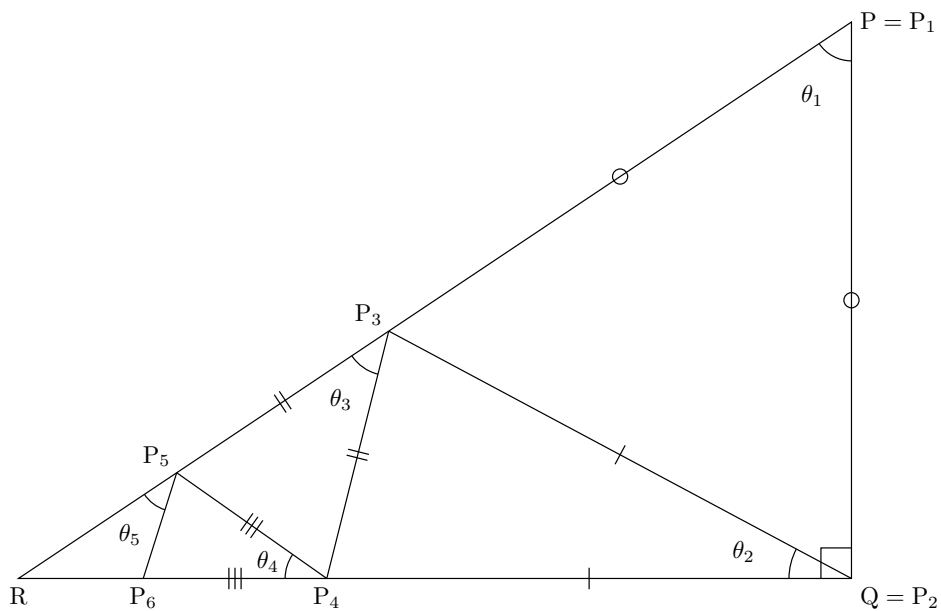
$$\theta_n = \angle P_{n+1} P_n P_{n+2} \quad (0 < \theta_n < \pi)$$

で定める。

(1) θ_2, θ_3 を θ を用いて表せ。

(2) $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ。



〔 6 〕 複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $|z - 1| = |z + 1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。
- (2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき、 $w = \frac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。
- (3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき、 $w = \frac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

