

2015 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 12 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において、次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2 + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

- (2) 2つの放物線 $y = x^2 - 2x + k$ と $y = -x^2 + 1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。
- (3) x, y が (1) の連立不等式を満たすとき、 $y - x^2 + 2x$ の最大値および最小値と、それらを与える x, y の値を求めよ。

〔 2 〕 半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が、辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また、 $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ とし、三角形 ABC の面積を S とする。

(1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し、線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2) $t = \tan \frac{\beta}{2}$ とおく。このとき、 S を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $S \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに、等号が成立するのは、三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。

[3] p と q は正の整数とする。2 次方程式 $x^2 - 2px - q = 0$ の 2 つの実数解を α, β とする。ただし $\alpha > \beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ただし $\alpha^0 = 1, \beta^0 = 1$ と定める。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して、 a_n は整数であることを示せ。
- (3) 自然数 n に対し、 $\frac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。 p と q が $q < 2p + 1$ を満たすとき、 b_n を a_n を用いて表せ。

[4] $f(x) = \log(e^x + e^{-x})$ とおく。曲線 $y = f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく。

(1) 次の等式を示せ。

$$b(t) = \frac{2te^{-t}}{e^t + e^{-t}} + \log(1 + e^{-2t})$$

(2) $x \geq 0$ のとき, $\log(1 + x) \leq x$ であることを示せ。

(3) $t \geq 0$ のとき,

$$b(t) \leq \frac{2}{e^t + e^{-t}} + e^{-2t}$$

であることを示せ。

(4) $b(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{4t}{(e^t + e^{-t})^2} dt$ であることを示せ。

〔 5 〕 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$h(x) = \sin x$$

とおく。3つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす部分を,
それぞれ C_1 , C_2 , C_3 とする。

- (1) C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ。
- (2) C_1 と C_3 の交点の x 座標を a とする。 $\sin a$, $\cos a$ の値を求めよ。
- (3) C_1 , C_2 , C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

[6] α を実数でない複素数とし、 β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし、複素数 w に対してその共役複素数を $\bar{w}$ で表す。

- (1) 複素数平面上で、関係式 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = |z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき、 C は原点を通る円であることを示せ。
- (2) 複素数平面上で、 $(z - \alpha)(\beta - \bar{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。 L は (1) で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また、その 2 点を P 、 Q とするとき、線分 PQ の長さを α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。
- (3) β の表す複素数平面上的点を R とする。(2) で定めた点 P 、 Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき、 β を α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

- 〔 7 〕 α, β は異なる 2 つの実数とする。座標平面において 2 点 $(\alpha, 1), (\beta, 1)$ をそれぞれ点 $(\alpha^2, \alpha), (\beta^2, \beta)$ に移す 1 次変換を表す行列を A とする。自然数 n に対し、点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $AQ = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となることを示せ。
- (2) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 点 $P_2, P_3, P_4, \dots$ がすべて直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上にあるような α, β を 1 組求め、そのときの行列 A を求めよ。

