

2014 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

[1] $f(x) = x^3 - x$ とする。 $y = f(x)$ のグラフに点 $P(a, b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。 3 つの接点 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $C(\gamma, f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1) $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。

(2) 点 G の座標を a, b を用いて表せ。

(3) 点 G の x 座標が正で, y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。

〔 2 〕 xy 平面上の曲線 $C : y = x \sin x + \cos x - 1$ ($0 < x < \pi$) に対して、以下の問いに答えよ。ただし $3 < \pi < \frac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

- (1) 曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。
- (2) 曲線 C と x 軸の交点を $A(\alpha, 0)$ とする。 $\alpha > \frac{2}{3}\pi$ であることを示せ。
- (3) 曲線 C , y 軸および直線 $y = \frac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また, xy 平面の原点 O , 点 A および曲線 C 上の点 $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。 $S < T$ であることを示せ。

[3] 関数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x > 0$ で考える。 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線を ℓ_a とし、 ℓ_a と y 軸との交点を $(0, Y(a))$ とする。以下の問いに答えよ。ただし、実数 k に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0$ であることは証明なしで用いてよい。

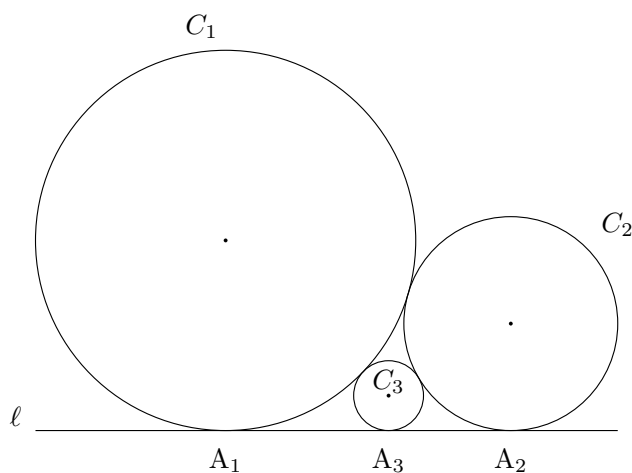
- (1) $Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $0 < a < b$ である a, b に対して、 ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わる時、 a のとりうる値の範囲を求め、 b を a で表せ。
- (3) (2) の a, b に対して、 $Z(a) = Y(a) - Y(b)$ とおく。 $\lim_{a \rightarrow +0} Z(a)$ および $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ。

〔 4 〕 平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1, C_2 があり、 C_1 と C_2 も互いに外接している。 ℓ, C_1, C_2 で囲まれた領域内に、これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に ℓ, C_n, C_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) で囲まれた領域内にあり、これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし、 $x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $r_1 = 16, r_2 = 9$ とする。

- (1) ℓ が C_1, C_2, C_3 と接する点を、それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく。線分 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 の長さおよび r_3 の値を求めよ。
- (2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ。 a, b の値も求めよ。
- (3) (2) で求めた a, b に対して、2 次方程式 $t^2 = at + b$ の解を α, β ($\alpha > \beta$) とする。 $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。
- (4) (3) の c, d, α, β に対して、

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示し、数列 $\{r_n\}$ の一般項を α, β を用いて表せ。



〔 5 〕 実数を成分とする正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $AB = BA$ を満たす A は、実数 x, y を用いて $A = xB + yE$ と表せることを示せ。

(2) $A^3 = E$ のとき

$$(t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E$$

を示せ。ただし、 $t = a + d$, $\Delta = ad - bc$ とする。

(3) $AB = BA$ かつ $A^3 = E$ を満たす A をすべて求めよ。

〔 6 〕 xy 平面上に楕円

$$C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > \sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

があり, C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $P \left(2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}}, t \right)$ ($t > 0$) における C_1 , C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1 , ℓ_2 とする。

(1) a と b の間に成り立つ関係式を求め, 点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) ℓ_1 と ℓ_2 が直交することを示せ。

(3) a が $a > \sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。

