

2013 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

[1] $f(x)$, $g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく。

(1) $2g(t) - 1 = f(2 \cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, $2g(\theta) \cos \theta = 1 + \cos \theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2 \cos \frac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

〔 2 〕 n は自然数とする。

(1) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2 - 1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 媒介変数 t によって

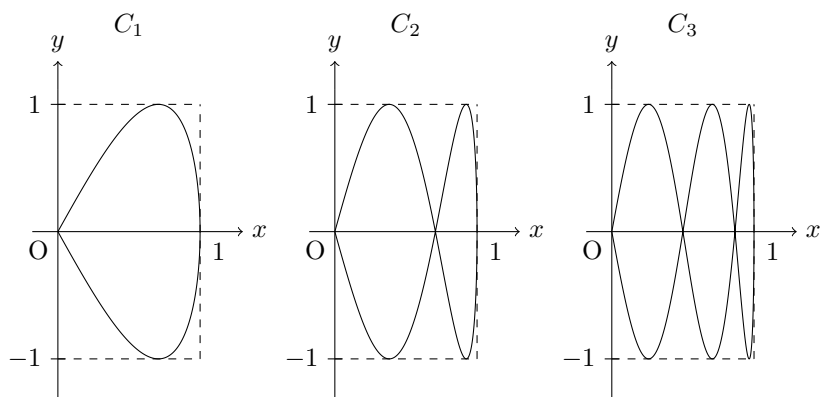
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geq 2)$$

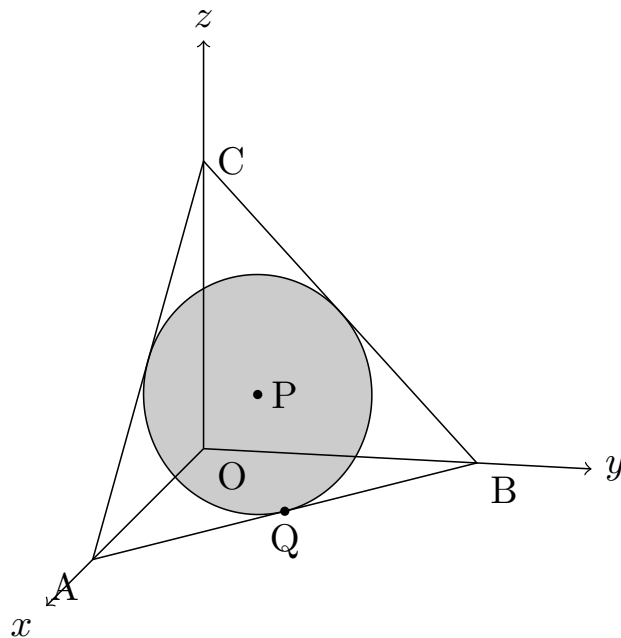
を用いてよい。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。



〔 3 〕 xyz 空間において、点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面上にあり、正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P 、円板 D と辺 AB の接点を Q とする。

- (1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。
- (2) 円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。
- (3) 円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき、その線分の長さを t を用いて表せ。
- (4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



〔 4 〕 3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = -c_n - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_{n+1} = -a_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

および $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ を満たすとする。ただし, a , b , c は定数とする。

- (1) $p_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $q_n = (-1)^n \{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする。 $a + b + c$ が奇数であれば, すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

〔 5 〕 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし, a, b, c, d は実数とする。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ。

[6] 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の、直線 $y = mx$ と平行な 2 接線を ℓ_1, ℓ'_1 とし、 ℓ_1, ℓ'_1 に直交する C の 2 接線を ℓ_2, ℓ'_2 とする。

- (1) ℓ_1, ℓ'_1 の方程式を m を用いて表せ。
- (2) ℓ_1 と ℓ'_1 の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ'_2 の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし、平行な 2 直線 ℓ, ℓ' の距離とは、 ℓ 上の 1 点と直線 ℓ' の距離である。
- (3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。
- (4) $\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき、 S の最大値を求めよ。

