

2012 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$ (p, q は実数) が 3 つの相異なる正の解をもち、次の 2 つの条件を満たすとする。

(I) 3 つの解の比は、 $1 : 2 : 3$ である。

(II) 3 つの解のうち最小のものは、 $\frac{1}{2}$ より大きく、 1 より小さい。

このとき、 $A = \log_{10} 2$, $B = \log_{10} 3$ とおき、 p と q を A と B を用いて表せ。

〔 2 〕 曲線 $C: y = \frac{1}{x+2}$ ($x > -2$) を考える。曲線 C 上の点 $P_1 \left(0, \frac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 とし、 ℓ_1 と x 軸との交点を Q_1 、点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく。以下同様に、自然数 n ($n \geq 2$) に対して、点 P_n における接線を ℓ_n とし、 ℓ_n と x 軸との交点を Q_n 、点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく。

(1) ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2) P_n の x 座標を x_n ($n \geq 1$) とする。 x_{n+1} を x_n を用いて表し、 x_n を n を用いて表せ。

(3) ℓ_n , x 軸, y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

〔 3 〕 曲線 $C : y = \log x \ (x > 0)$ を考える。自然数 n に対して、曲線 C 上に点 $P(e^n, n)$, $Q(e^{2n}, 2n)$ をとり、 x 軸上に点 $A(e^n, 0)$, $B(e^{2n}, 0)$ をとる。四角形 $APQB$ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(n)$ とする。また、線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $S(n)$ とする。

(1) $V(n)$ を n の式で表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{V(n)}$ を求めよ。

〔 4 〕 四面体 OABC において、次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と、平面 α との交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

(2) 点 H は $\triangle ABC$ の垂心であること、すなわち $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ を示せ。

(3) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1$ とする。このとき、 $\triangle ABC$ の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。

〔 5 〕 以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面において原点のまわりに角 θ ($0 < \theta < \pi$) だけ回転する移動を表す行列を A とする。 A が等式 $A^2 - A + E = O$ を満たすとき、 θ と A を求めよ。
ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。
- (2) 直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動を表す行列 B を求めよ。
- (3) 直線 $y = kx$ に関する対称移動を表す行列を C とする。(1), (2) において求めた行列 A , B に対して $BC = A$ が成り立つとき、 k を求めよ。

[6] 2つの双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$, $H : x^2 - y^2 = -1$ を考える。双曲線 H 上の点 $P(s, t)$ に対して、方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を ℓ とする。

- (1) 直線 ℓ は点 P を通らないことを示せ。
- (2) 直線 ℓ と双曲線 C は異なる2点 Q, R で交わることを示し、 $\triangle PQR$ の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。
- (3) (2) における3点 G, Q, R に対して、 $\triangle GQR$ の面積は点 $P(s, t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

