

2011 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 O を原点とする xy 平面において、直線 $y = 1$ の $|x| \geq 1$ を満たす部分を C とする。

- (1) C 上に点 $A(t, 1)$ をとるとき、線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。
- (2) 点 A が C 全体を動くとき、線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め、それを図示せよ。

〔 2 〕 自然数 n に対し，関数

$$F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n} dt \quad (x \geq 0)$$

を考える。

- (1) 関数 $F_n(x)$ ($x \geq 0$) はただ一つの点で最大値をとることを示し， $F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。
- (2) (1) で求めた a_n に対し，極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n$ を求めよ。

[3] α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C : x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ および、その中心を通る直線 $\ell : y = (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2) 等式

$$2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leq (\tan \alpha)x - \sin \alpha \\ x^2 + (y + \sin \alpha)^2 \leq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔 4 〕 数列 $\{a_n\}$ を,

$$a_1 = 1,$$
$$(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 等式

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つように, 定数 p, q, r の値を定めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ。

〔 5 〕 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の 2 点 $P(x, y)$,

$Q(u, v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき、行列 A により点 P は点 Q に移るという。

点 $(1, 3)$ は行列 A により点 $(10, 10)$ に移り、さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

が成り立つものとする。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A により点 $(10, 10)$ が移る点の座標を求めよ。

(2) 実数 a, b, c, d の値を求めよ。

(3) 次の条件 (*) を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ。

(*) 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る。

[6] d を正の定数とする。2 点 $A(-d, 0)$, $B(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A , 点 B , 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP , BP , OP と書く。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。
- (2) $AP^2 + BP^2$ および $AP \cdot BP$ を, OP と d を用いて表せ。
- (3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき, $AP^3 + BP^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

