

2010 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a > 0$ とする。

- (1) $f(-1) \leq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ。
- (3) $-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

〔 2 〕 3つの曲線

$$C_1 : y = \sin x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$C_2 : y = \cos x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$C_3 : y = \tan x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点, C_2 と C_3 の交点, C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。
- (2) C_1 , C_2 , C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

〔3〕 n を自然数とし、1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して、不等式 $\int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k)$ を示せ。
- (2) 不等式 $\int_1^n \log x dx \leq \log n!$ を示し、不等式 $n^n e^{1-n} \leq n!$ を導け。
- (3) $x \geq 0$ に対して、不等式 $x^n e^{1-x} \leq n!$ を示せ。

〔 4 〕 点 O を原点とする座標平面上に、2 点 $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) をとり、以下の条件をみたす 2 点 C , D を考える。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$$

また、 $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とおく。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ の成分を求めよ。
- (2) $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき、 θ と S_1 の値を求めよ。
- (3) $S = 4S_1 + 3S_2$ を最小にする θ と、そのときの S の値を求めよ。

[5] a を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする。2 点 $P(x, y)$, $Q(X, Y)$ について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, P は A により Q に移るという。

(1) 原点以外の点で, A によりそれ自身に移るものが存在するとき, a を求めよ。

(2) 次の条件 (*) をみたす a, k を求めよ。

(*) 直線 $\ell: y = kx + 1$ 上のすべての点は, A により ℓ 上の点に移る。

(3) (*) をみたす a, k に対し, 直線 ℓ 上の点で, A によりそれ自身に移るものを求めよ。

〔 6 〕 直線 $\ell: mx + ny = 1$ が, 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) に接しながら動くとする。

(1) 点 (m, n) の軌跡は楕円になることを示せ。

(2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_1 とし, もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_2 とする。このとき $d_1 d_2 = b^2$ を示せ。

