

2009 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部, 理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ を示せ。
- (2) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。
- (3) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos \alpha)(x - 2\cos \beta)$ となる角度 α, β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

〔 2 〕 xyz 空間内において, yz 平面上で放物線 $z = y^2$ と直線 $z = 4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を ℓ とし, ℓ のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

- (1) D と平面 $z = t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leq t \leq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき, 点 P と点 $(1, 1, t)$ との距離の最大値, 最小値を求めよ。
- (2) 平面 $z = t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ ($0 \leq t \leq 4$) を求めよ。
- (3) E の体積 V を求めよ。

〔 3 〕 $f(x)$ を整式で表される関数とし、 $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$ とおく。任意の実数 x について

$$x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

が成り立つとする。

(1) $xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

〔 4 〕 自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$(5 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

- (1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ。
- (2) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ が成り立つような定数 p , q を 2 組求めよ。
- (4) a_n , b_n を n を用いて表せ。

〔 5 〕 実数 a に対し，行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$ を考える。 n を自然数とし，座標平面上において，行列 A^n により点 $(1, 0)$ が点 P_n に移り，点 $(0, 1)$ が点 Q_n に移るものとする。2 点 P_n, Q_n の間の距離を P_nQ_n で表す。

(1) P_1Q_1 を求めよ。

(2) A^n を a と n を用いて表せ。

(3) n が固定され， a が実数全体を動くとき， P_nQ_n の最小値を求めよ。

〔 6 〕 点 $P(x, y)$ が双曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上を動くとき，点 $P(x, y)$ と点 $A(a, 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1) $f(a)$ を a で表せ。

(2) $f(a)$ を a の関数とみなすとき， ab 平面上に曲線 $b = f(a)$ の概形をかけ。

