

2008 年度 個別学力試験問題

# 数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部，理系学部

|     |
|-----|
| 注 意 |
|-----|

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

| 学 部     | 解 答 す べ き 問 題 |
|---------|---------------|
| 文 系 学 部 | 事前に確認すること     |
| 理 系 学 部 | 事前に確認すること     |

〔 1 〕  $p, q$  を正の実数とする。 $x$  の方程式

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

が 1 より大きい解をもつとき、点  $(\log_{10} p, \log_{10} q)$  の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

[ 2 ]  $xyz$  空間内の点  $P(1, 0, 1)$  と,  $xy$  平面上の円  $C : x^2 + (y - 2)^2 = 1$  に属する点  $Q(\cos \theta, 2 + \sin \theta, 0)$  を考える。

- (1) 直線  $PQ$  と平面  $z = t$  の交点の座標を  $(\alpha, \beta, t)$  とするとき,  $\alpha^2 + \beta^2$  を  $t$  と  $\theta$  で表せ。
- (2) 線分  $PQ$  を  $z$  軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面  $z = 0, z = 1$  によって囲まれる立体の体積を  $\theta$  で表せ。
- (3)  $Q$  が  $C$  上を一周するとき, (2) で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。

〔 3 〕  $e$  は自然対数の底とする。  $t > e$  において関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  を次のように定める。

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x} dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx$$

(1)  $f(t) - g(t)$  を  $t$  の 1 次式で表せ。

(2)  $1 \leq x \leq e$  かつ  $t > e$  のとき  $\frac{1}{t-x} \leq \frac{1}{t-e}$  が成り立つことを用いて,  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  を示せ。

(3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right) = 0$  となる定数  $a$ ,  $b$  を求めよ。

〔 4 〕 二つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を次の漸化式によって定める。

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3b_n)$$

- (1) すべての自然数  $n$  について,  $a_n^2 - 5b_n^2 = 4$  であることを示せ。
- (2) すべての自然数  $n$  について,  $a_n$ ,  $b_n$  は自然数かつ  $a_n + b_n$  は偶数であることを証明せよ。

〔 5 〕 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$  とする。 $AP = PD$  が成り立つとき、 $a$ ,  $x$ ,  $y$  を求めよ。ただし  $a > 0$  とする。

(2)  $(A + tE)^n = 4E$  が成り立つような実数  $t$  と自然数  $n$  の組をすべて求めよ。ただし  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。

〔 6 〕 放物線  $C : y = x^2$  上の異なる 2 点  $P(t, t^2)$ ,  $Q(s, s^2)$  ( $s < t$ ) における接線の交点を  $R(X, Y)$  とする。

(1)  $X, Y$  を  $t, s$  を用いて表せ。

(2) 点  $P, Q$  が  $\angle PRQ = \frac{\pi}{4}$  を満たしながら  $C$  上を動くとき, 点  $R$  は双曲線上を動くことを示し, かつ, その双曲線の方程式を求めよ。

