

2007 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

●対 象 学 部

文系学部，理系学部

注 意

1. 問題冊子は 1 ページから 8 ページまでである。
2. 解答すべき問題番号を下表で確認のうえ指定の解答用紙に解答すること。
3. 問題冊子は持ち帰ること。

学 部	解 答 す べ き 問 題
文 系 学 部	事前に確認すること
理 系 学 部	事前に確認すること

〔 1 〕 xy 平面上に 2 定点 $A(1, 0)$ と $O(0, 0)$ をとる。また, m を 1 より大きい実数とする。

(1) $AP : OP = m : 1$ を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。

(2) 点 A を通る直線で, (1) で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ。また, その共有点の座標も求めよ。

〔 2 〕 関数 $f(x) = b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$, $b > 1$ とする。

(1) $f(x) \geq 0$ を満たす x の範囲を求めよ。

(2) 曲線 $y = \sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(3) $a = b \log b$ のとき、(2) で求めた体積 V を $V(b)$ と表す。このとき、 $\lim_{b \rightarrow \infty} V(b) = 2\pi$ となることを示せ。

[3]

(1) $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx$ を求めよ。

(2) 定数 a に対して,

$$f(x) = ax \sin x + x + \frac{\pi}{2}$$

とおく。このとき, 不等式

$$\int_0^\pi \{f'(x)\}^2 \, dx \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ。ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。

[4]

- (1) 一般項 a_n が $an^3 + bn^2 + cn$ で表される数列 $\{a_n\}$ において,

$$n^2 = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つように, 定数 a, b, c を定めよ。

- (2) (1) の結果を用いて, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となることを示せ。

- (3) $1, 2, \dots, n$ の相異なる 2 数の積のすべての和を $S(n)$ とする。たとえば, $S(3) = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 11$ である。 $S(n)$ を n の 4 次式で表せ。

[5] $a \neq 0$ とする。 $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して, 2 次正方行列 P が

$$PA = A + B, \quad PB = A - B$$

を満たしている。

(1) a と b を用いて P を表し, P が逆行列 P^{-1} をもつことを示せ。

(2) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}B$ とおく。 xy 平面において, 点 (a, b) が放物線 $x = y^2 + 2$ 上を動くとき, 点 (s, t) の軌跡を求めよ。ただし, $|y| \leq 1$ とする。

〔 6 〕 xy 平面上で、2 次曲線 $C : x^2 + ay^2 + by = 0$ が直線 $L : y = 2x - 1$ に点 P で接している。ただし、 $a \neq -\frac{1}{4}$ とする。

- (1) a と b の関係式を求めよ。
- (2) C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に， b の値の範囲を求めよ。
- (3) C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め， xy 平面上に図示せよ。

