

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2024年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

以下の問いに答えなさい。ただし、 $\log$ は自然対数とする。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ ($x > 0$) の増減を調べなさい。また、そのグラフの変曲点を求めなさい。
- (2) 3 以上の整数 n に対して、積分 $\int_2^n \frac{\log x}{x^2} dx$ の値を求めなさい。
- (3) 3 以上の整数 n に対して、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{k=3}^n \frac{\log k}{k^2} < \frac{1}{2} (1 + \log 2)$$

ただし、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい。

第 2 問

四面体 OABC において、O から平面 ABC に垂線 OP を引く。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 2, & |\vec{b}| &= 3, & |\vec{c}| &= 4, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= -1, & \vec{b} \cdot \vec{c} &= -4, & \vec{c} \cdot \vec{a} &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の大きさを求めなさい。

第 3 問

1, 2, 3, 4 の番号がついた玉が 1 個ずつあり、これらが 1 つの袋に入っている。机の上には 1, 2, 3, 4 の番号がついたカードが 1 枚ずつ置かれている。袋から玉を 1 個取り出し、ついている番号を確認して袋に戻し、もし同じ番号のカードが机の上に残っていればそのカードを取り除く。この操作を繰り返す。なお、すべてのカードが取り除かれても、操作は継続するものとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 操作を 3 回終えたとき、カードが 3 枚残っている確率を求めなさい。
- (2) 操作を 3 回終えたとき、1 の番号のカードが残っていない確率を求めなさい。
- (3) n を 2 以上の整数とする。操作を n 回終えたとき、カードがちょうど 2 枚残っている確率を求めなさい。
- (4) ちょうど 4 回目の操作でカードが取り除かれて 1 の番号のカードだけが残る確率を求めなさい。