

# 入学試験過去問題

## 数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：75分

問題数：3問

## 第 1 問

$a$  を  $0 < a < 1$  をみたす実数とし,

$$f(x) = \frac{10a}{a+2} \log x + 2 \log(1-x) \quad (0 < x < 1)$$

とする。ただし,  $\log$  は自然対数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 関数  $y = f(x)$  ( $0 < x < 1$ ) が極大になる  $x$  がただ 1 つ存在することを示し, その  $x$  を  $a$  を用いて表しなさい。
- (2) 数列  $\{a_n\}$  を以下のように定める。 $a_1 = \frac{1}{4}$  とする。 $a = a_n$  としたとき  $x$  の関数  $y = f(x)$  ( $0 < x < 1$ ) が極大になる  $x$  の値を  $a_{n+1}$  とする。このとき  $a_2$  の値を求めなさい。
- (3)  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおく。数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めなさい。
- (4) 数列  $\{a_n\}$  の収束, 発散を調べ, 収束するときにはその極限値を求めなさい。

## 第 2 問

関数

$$f(\theta) = 2 \sin 3\theta - 3 \sin \theta + 3\sqrt{3} \cos \theta$$

について、以下の問いに答えなさい。

- (1)  $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$  を  $r \sin(\theta + \alpha)$  ( $r > 0$ ,  $-\pi \leq \alpha < \pi$ ) の形に変形しなさい。
- (2)  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき  $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$  の最大値と最小値を求め、そのときの  $\theta$  の値をそれぞれ求めなさい。
- (3)  $x = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$  とおく。  $\sin \left\{ 3 \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) \right\} = 3 \left( \frac{x}{2} \right) - 4 \left( \frac{x}{2} \right)^3$  であることを示しなさい。
- (4)  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  のとき  $f(\theta)$  の最大値と最小値を求め、そのときの  $\theta$  の値をそれぞれすべて求めなさい。

### 第 3 問

座標空間内に 4 点  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(1, 2, 0)$ ,  $P(2, 2, 1)$  がある。2 点  $A$ ,  $B$  を通る直線を  $l$  とし, 3 点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を通る平面を  $\alpha$  とする。

- ・ 点  $A$  に関して点  $P$  と対称な点を  $Q$  とする。すなわち線分  $PQ$  の中点が  $A$  である。
- ・ 直線  $l$  に関して点  $P$  と対称な点を  $R$  とする。すなわち  $P$ ,  $R$  を通る直線が  $l$  と垂直であり, 線分  $PR$  の中点が  $l$  上にある。
- ・ 平面  $\alpha$  に関して点  $P$  と対称な点を  $S$  とする。すなわち  $P$ ,  $S$  を通る直線が  $\alpha$  と垂直であり, 線分  $PS$  の中点が  $\alpha$  上にある。

このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 点  $Q$  の座標を求めなさい。
- (2) 点  $R$  の座標を求めなさい。
- (3) 点  $S$  の座標を求めなさい。
- (4)  $\triangle QRS$  の面積を求めなさい。