

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

$f(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ とし, θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸と y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = \frac{1}{\tan \theta} \sin x$ の $0 < x < \pi$ における共有点の x 座標を $a(\theta)$ とする。 $a(\theta)$ を θ の式で表しなさい。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq a(\theta)$) と曲線 $y = \frac{1}{\tan \theta} \sin x$ ($0 \leq x \leq a(\theta)$) と y 軸で囲まれた図形の面積を $S(\theta)$ とする。 $3S(\theta) = S$ が成り立つとき θ の値を求めなさい。

第 2 問

a を正の実数とし、 O を原点とする座標空間において、3 点 $A(2a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に直交する単位ベクトルをすべて求めなさい。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ が (1) で求めた単位ベクトルと平行になるような実数 s, t を求めなさい。
- (3) O を中心とする球面が平面 α と点 P で接しているとき、 P の座標と球面の半径 $r(a)$ を求めなさい。
- (4) a が正の実数全体を動くとき、 $\frac{r(a)^2}{a}$ の最大値とそのときの a の値を求めなさい。

第 3 問

a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 4x^2 + (a - 2)x - 2(a - 6)$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と表すとき、 $f'(4) = f(4)$ をみたす a の値を求めなさい。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は a の値に無関係な正の実数解をもつことを示し、その実数解を求めなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が 2 重解をもつときの a の値をすべて求めなさい。それぞれの a の値に対して、方程式 $f(x) = 0$ のすべての解を求めなさい。