前期 **理系**

2022年度入学試験学力検査問題

数　　学

［ 理系学部　　75分 ］

答案用紙　3**枚**

注　意

1. 監督員の合図があるまで，問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規，コンパスの使用を認めます。
   ただし，分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は，答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

（例）　受験番号　1234567X　の場合　⟶

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し，必ず配付された答案用紙に記入してください。
   答案用紙には，解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は，手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり，持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが，どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は，持ち帰ってください。また，試験終了時刻まで退室できません。

1 $f(x) = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$ とし，θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 曲線 $y = f(x)$（$0 \leqq x \leqq \pi$）と x 軸と y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = \dfrac{1}{\tan\theta}\sin x$ の $0 < x < \pi$ における共有点の x 座標を $a(\theta)$ とする。$a(\theta)$ を θ の式で表しなさい。

(3) 曲線 $y = f(x)$（$0 \leqq x \leqq a(\theta)$）と曲線 $y = \dfrac{1}{\tan\theta}\sin x$（$0 \leqq x \leqq a(\theta)$）と y 軸で囲まれた図形の面積を $S(\theta)$ とする。$3S(\theta) = S$ が成り立つとき θ の値を求めなさい。

2 a を正の実数とし，O を原点とする座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(2a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ a,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に直交する単位ベクトルをすべて求めなさい。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が (1) で求めた単位ベクトルと平行になるような実数 s，t を求めなさい。

(3) O を中心とする球面が平面 α と点 P で接しているとき，P の座標と球面の半径 $r(a)$ を求めなさい。

(4) a が正の実数全体を動くとき，$\dfrac{r(a)^2}{a}$ の最大値とそのときの a の値を求めなさい。

$\boxed{3}$ a を実数とし，$f(x) = x^3 - 4x^2 + (a-2)x - 2(a-6)$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と表すとき，$f'(4) = f(4)$ をみたす a の値を求めなさい。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は a の値に無関係な正の実数解をもつことを示し，その実数解を求めなさい。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が 2 重解をもつときの a の値をすべて求めなさい。それぞれの a の値に対して，方程式 $f(x) = 0$ のすべての解を求めなさい。