

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2018年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

a を $a > 1$ をみたす実数とし, 2 つの放物線 $y = x^2$ と $y = a(x^2 - 1)$ をそれぞれ C_1 , C_2 とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) C_1 と C_2 の 2 つの交点の座標を求めなさい。
- (2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めなさい。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値, およびそのときの $S(a)$ の値を求めなさい。

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0 \text{ のとき}) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたしているとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $a_1 = \frac{9}{4}$ であるとき, a_7 の値を求めなさい。
- (2) $a_1 = 4$ であるとき, $\sum_{i=1}^{40} a_i$ の値を求めなさい。
- (3) $0 \leq a_1 \leq 1$ であり, かつ $\sum_{i=1}^{22} a_i = 0$ をみたすとき, a_1 の値を求めなさい。

第 3 問

空間において、点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C をとる。ただし、4 点 O, A, B, C は同一平面上にはないとする。3 点 O, A, C が定める平面 OAC と平面 OAB のなす角を α とし、平面 OAB と平面 OBC のなす角を β とし、さらに平面 OBC と平面 OAC のなす角を γ とする。また、 $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 平面 OAB 上に点 P を、直線 CP が平面 OAB と直交するようにとる。また、直線 OA 上に点 F を、直線 PF が直線 OA と直交するようにとる。直線 OA と直線 CF が直交することを示しなさい。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を $\sin b$, $\sin c$, および $\sin \alpha$ を用いて表しなさい。
- (3) 以下の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$