

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

n を自然数とし、 e を自然対数の底とする。関数

$$f(x) = x^{n-1}e^{-x}$$

について、以下の問いに答えなさい。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $x \geq 0$ のとき $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを、 n に関する数学的帰納法によって示しなさい。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めなさい。
- (3) $n \geq 3$ の場合に、 $x > 0$ の範囲における $f(x)$ の最大値、およびそのときの x の値を求めなさい。また、 $x > 0$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めなさい。

第 2 問

複素数平面上の原点 O と 2 点 $A(2 - 4\sqrt{3}i)$, $B(3 + \sqrt{3}i)$ を考える。ただし, i を虚数単位とする。三角形 OAB の外側に, 3 辺 AB , BO , OA をそれぞれ 1 辺とする正三角形 ALB , BMO , ONA を作る。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 L , M , N を表す複素数をそれぞれ求めなさい。
- (2) 直線 OL と直線 AM の交点を P とする。点 P を表す複素数を求めなさい。
- (3) 3 点 B , P , N が一直線上にあることを示しなさい。

第 3 問

x は $0 \leq x \leq 1$ をみたす実数とし, e は自然対数の底とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 定積分 $\int_x^{x+1} |1-t|e^{1-t} dt$ を求めなさい。

(2) 定積分 $\int_x^{x+1} |\pi \sin(\pi t)| dt$ を求めなさい。

(3) 関数

$$f(x) = \int_x^{x+1} \{|1-t|e^{1-t} - |\pi \sin(\pi t)|\} dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めなさい。