

# 入学試験過去問題

## 数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2016 年

試験時間：75 分

問題数：3 問

## 第 1 問

$a$  と  $b$  を  $0 \leq a \leq 1$ ,  $0 \leq b < 1$  をみたす定数とする。数列  $\{a_n\}$  を次の条件によって定める。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + b) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$c = 1 - \sqrt{1-b}$  とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1)  $0 \leq a_n \leq 1$  が成り立つことを示しなさい。
- (2)  $a_{n+1} - c = \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$  が成り立つことを示しなさい。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$  が成り立つことを示しなさい。

## 第 2 問

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  の範囲で定義された関数  $f(x)$  は次の等式をみたすとする。

$$f(x) = 2x - \tan x + \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t) \cos t \, dt$$

以下の問いに答えなさい。

- (1) 不定積分  $\int x \cos x \, dx$  を求めなさい。
- (2)  $f(0)$  の値を求めなさい。
- (3)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  における  $f(x)$  の最大値を求めなさい。

### 第 3 問

$a$  と  $b$  は  $a^2 > b$  をみたす実数であるとする。座標平面において、点  $P(a, b)$  から曲線  $y = x^2$  に引いた 2 つの接線の接点をそれぞれ  $Q, R$  とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 内積  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$  を  $a$  と  $b$  の式で表しなさい。
- (2) 三角形  $PQR$  の面積  $S$  を  $a$  と  $b$  の式で表しなさい。
- (3) 直線  $y = 2x - 3$  を  $l$  とする。点  $P$  が  $l$  上を動くとき、(2) の  $S$  の最小値を求めなさい。