

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2014年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

s, t, u を実数, i を虚数単位とし, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。方程式

$$f(x) = x^4 + sx^3 - tx^2 + ux + 1 = 0$$

が ω を解にもつとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $-t = s + 1, u = s$ であることを示しなさい。
- (2) $f(\omega^2) = 0$ であることを示しなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が ω, ω^2 と異なる解 α を 2 重解にもつような s と α の組 (s, α) をすべて求めなさい。

第 2 問

2 次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ についての条件

$$(*) \quad a = d \text{ かつ } b = -c$$

を考える。 $(*)$ を満たす M に対して、実数 $f(M)$ を $f(M) = \sqrt{a^2 + b^2}$ と定める。以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 次正方行列 A, B がともに $(*)$ を満たすならば、積 AB も $(*)$ を満たすことを証明しなさい。
- (2) 2 次正方行列 A, B がともに $(*)$ を満たすならば、 $f(AB) = f(A)f(B)$ が成り立つことを証明しなさい。
- (3) $A = 16 \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ に対して $f(A^n)$ が十進法で 10 けた以上となる自然数 n のうち最小のものを求めなさい。ただし、本問においては $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

第 3 問

$f(x) = xe^{-x}$, $t > 1$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{t}$ のすべての交点の座標を求めなさい。
- (2) (1) のような $y = f(x)$ と $y = \frac{x}{t}$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (3) t が 1 より大きい実数全体を動くとき, 関数 $g(t) = \frac{t}{\log t}(1 - S(t))$ の最小値を求めなさい。