

前期

理系

2014 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理系学部 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 s, t, u を実数, i を虚数単位とし, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。方程式

$$f(x) = x^4 + sx^3 - tx^2 + ux + 1 = 0$$

が ω を解にもつとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $-t = s + 1, u = s$ であることを示しなさい。
- (2) $f(\omega^2) = 0$ であることを示しなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が ω, ω^2 と異なる解 α を 2 重解にもつような s と α の組 (s, α) をすべて求めなさい。

2 2 次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ についての条件

$$(*) \quad a = d \text{ かつ } b = -c$$

を考える。 $(*)$ を満たす M に対して, 実数 $f(M)$ を $f(M) = \sqrt{a^2 + b^2}$ と定める。
以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 次正方行列 A, B がともに $(*)$ を満たすならば, 積 AB も $(*)$ を満たすことを証明しなさい。
- (2) 2 次正方行列 A, B がともに $(*)$ を満たすならば, $f(AB) = f(A)f(B)$ が成り立つことを証明しなさい。
- (3) $A = 16 \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ に対して $f(A^n)$ が十進法で 10 けた以上となる自然数 n のうち最小のものを求めなさい。ただし, 本問においては $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

3 $f(x) = xe^{-x}$, $t > 1$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{t}$ のすべての交点の座標を求めなさい。
- (2) (1) のような $y = f(x)$ と $y = \frac{x}{t}$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (3) t が 1 より大きい実数全体を動くとき, 関数 $g(t) = \frac{t}{\log t}(1 - S(t))$ の最小値を求めなさい。

