

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2013年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

$\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ とする。点 $P(1, 1, 0)$ を通り, $\vec{a}$ に平行な直線を l_1 とし, 点 $Q(0, 0, 1)$ を通り, $\vec{b}$ に平行な直線を l_2 とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) l_1 上の点 R と l_2 上の点 S を通る直線 l_3 が, l_1 と l_2 に垂直であるとする。このとき, R, S の座標を求めなさい。
- (2) l_1 上の 2 点 E, F が $EF = 2$ を満たしながら動き, l_2 上を点 G が動くとき, $\triangle EFG$ の面積の最小値を求めなさい。

第 2 問

A, B, P を実数を成分とする 2 次の正方行列とする。 P は逆行列をもち、 $P^{-1}AP$ の (1, 2) 成分と (2, 1) 成分は 0 となるものとする。 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) $a_1 \neq a_2$ かつ $AB = BA$ が成り立つとき、 $b_2 = b_3 = 0$ であることを示しなさい。
- (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき、 a_1, a_2, c の値を求めなさい。
- (3) A, P を (2) で与えた行列とし、 $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。正の整数 m, n に対し、 $(A^m + B^m)^n$ を求めなさい。

第 3 問

原点を O とする座標平面で、関数 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) のグラフを C とする。また、 $t > 1$ を満たす実数 t に対し、直線 $x + y = t$ と C との交点を P 、直線 $x + y = t$ と x 軸との交点を Q とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 PQ の長さ $f(t)$ を求めなさい。
- (2) 次の極限值を求めなさい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k(t-1)}{n}\right) \frac{t-1}{\sqrt{2}n}$$

- (3) 線分 OP 、 x 軸および C で囲まれる図形の面積を S とする。 S を用いて点 P の座標を表しなさい。