

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2012年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

e は自然対数の底とする。 $f(x) = x \log x$ ($x > 0$, $\log x$ は x の自然対数) とおく。 $t > e$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における接線の傾きが $\log t$ となるとき, A の x 座標 $a(t)$ を求めなさい。
- (2) $x \geq 1$ の範囲において, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a(t)$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (3) $t \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{S(t)}{t^p \log t}$ が 0 でない値に収束するような正の定数 p の値を求めなさい。また, そのときの $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t^p \log t}$ を求めなさい。

第 2 問

原点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(1, 1, 1)$ を通る直線を l とし, 3 点 $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 3)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\vec{a}$ は平面 α に垂直で, 成分がすべて正であり, 長さが 7 になるものとする。このとき, $\vec{a}$ を成分で表しなさい。
- (2) $\triangle BCD$ の面積を求めなさい。
- (3) O から平面 α へ引いた垂線と平面 α との交点を H とする。線分 OH の長さを求めなさい。
- (4) P は座標がすべて正である直線 l 上の点とする。 P を中心とする半径 7 の球面が点 Q で平面 α に接するとき, P, Q の座標を求めなさい。

第 3 問

A は 2 次正方行列とし、 E , O はそれぞれ A と同じ型の単位行列, 零行列とする。 A は kE (k は実数) の形でなく, $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たす。以下の問いに答えなさい。ただし, n は自然数とする。

- (1) $A^3 = aA + bE$ を満たす実数 a , b を求めなさい。
- (2) $A^n = a_nA + b_nE$ を満たす実数 a_n , b_n を求めなさい。
- (3) A^n の逆行列が $xA + yE$ (x , y は実数) と表せるとき, x , y を求めなさい。