

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：75 分

問題数：3 問

第 1 問

$f(x) = \log x - 2x + 1$ ($x > 0$) とする。 a を正の定数とし、 t は $0 < t < a$ をみたす実数とする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上に 3 点 Q, A, P を、それぞれの x 座標が $a - t$, a , $a + t$ となるようにとる。以下の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。
- (2) 点 R が $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AR}$ を満たすとき、 $\overrightarrow{AR}$ を求めなさい。
- (3) 四角形 APRQ の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (4) $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)}{t^3}$ を求めなさい。

第 2 問

座標空間の 3 点 $A(1, 2, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, 4, 2)$ を通る平面を α とする。点 $D(0, 2, 1)$ を通り、ベクトル $\vec{a} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を l_1 とする。また点 D を通り、ベクトル $\vec{b} = (-1, -1, 1)$ に平行な直線を l_2 とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) l_1 と α の交点を E とし、 l_2 と α の交点を F とする。 E, F の座標を求めなさい。
- (2) $\vec{DE}$ と $\vec{DF}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおくと、 $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (3) $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。

第 3 問

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のすべての成分は正であるとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) t の 2 次方程式

$$t^2 - (a + d)t + ad - bc = 0 \quad \dots\dots(*)$$

が異なる 2 つの実数解をもつことを示し、また、大きい方の解は正であることを示しなさい。

- (2) $(*)$ の大きい方の解を $t = \beta$ と表す。実数 y で、

$$(A - \beta E) \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすものを求めなさい。ただし、 E は 2 次の単位行列とする。

- (3) (2) で求めた y が正であることを示しなさい。