

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（理系）

対象年度：2008年

試験時間：75分

問題数：3問

第 1 問

n を自然数とすると、1 から $2n$ までの相異なる自然数が 1 つずつ書かれた $2n$ 個の玉が袋の中に入っている。袋から 1 個の玉を取り出したときに書かれている数を a とする。この玉を袋に戻さずに、再び袋から 1 個の玉を取り出したときに書かれている数を b とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $2a = b$ または $a = 2b$ となる確率を求めなさい。
- (2) $a \geq b$ となる確率を求めなさい。
- (3) $2a \geq b$ となる確率を求めなさい。

第 2 問

座標平面上に点 $A(1, 0)$ をとる。 $0 \leq t \leq 2\pi$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 以上の自然数 n に対して、座標平面上に点 $P_k\left(\cos \frac{kt}{n}, \sin \frac{kt}{n}\right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) をとるとき、三角形 AP_kP_n の面積 $S_k(t)$ を求めなさい。ただし、 A, P_k, P_n が三角形をつくらないときは $S_k(t) = 0$ とする。
- (2) 次の極限值を求めなさい。

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(t)$$

- (3) 次の定積分の値を求めなさい。

$$I = \int_0^{2\pi} t f(t) dt$$

第 3 問

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 3\sqrt{3}, \quad b_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{3}b_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{3}a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定めるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) すべての自然数 n に対して、次の式を満たす行列 A を 1 つ求めなさい。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

- (2) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を

$$c_n = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a_n + b_n), \quad d_n = \frac{1}{2}(-a_n + \sqrt{3}b_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定めるとき、すべての自然数 n に対して、次の式を満たす行列 B を 1 つ求めなさい。

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

- (3) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項 c_n , d_n を求めなさい。
(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項 a_n , b_n を求めなさい。