

前期

理系

2007 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理系学部 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 条件 $0 \leq a \leq 1$ をみたす実数 a に対して、連立不等式

$$\begin{cases} y \leq -|x| + a + 2 \\ y \geq |x| + a \\ y \leq 2 \end{cases}$$

の表す座標平面上的領域を $D(a)$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 領域 $D\left(\frac{1}{2}\right)$ を図示しなさい。
- (2) 領域 $D(a)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ を求めなさい。
- (3) 条件 $0 \leq a \leq 1$ のもとで、体積 $V(a)$ が最大となるときの a の値を求めなさい。

2 いま n を自然数として、次の性質をもつ 2 つのルーレットがあるとする。ルーレット 1 をまわすと $0, 1, 2, \dots, 12n-1, 12n$ のいずれかの数が、それぞれ同じ確率 $\frac{1}{12n+1}$ で出る。ルーレット 2 をまわすと $3n, 6n$ のどちらかの数が、それぞれ同じ確率 $\frac{1}{2}$ で出る。さて 2 人の人物 A, B が、これらのルーレットを用いて次のようなゲームをする。まず A がルーレット 1 をまわし、出た数を a とする。次に B がルーレット 2 をまわし、出た数を b とする。もし $a \geq 2b$ ならば A の勝ち、もし $b \geq 2a$ ならば B の勝ち、それらのいずれでもなければ引き分けとする。このとき A が勝つ確率を p_n とし B が勝つ確率を q_n とし、以下の問いに答えなさい。答えのみでなく、理由も述べなさい。

- (1) 確率 p_1 および q_1 を、それぞれ求めなさい。
- (2) 確率 p_n および q_n を、それぞれ n を用いて表しなさい。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を、それぞれ求めなさい。

3 以下の問いに答えなさい。

- (1) 実数 a, b, x, y に対して、不等式

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

が成り立つことを示しなさい。

- (2) 実数を成分とする 2 次の正方行列 A について、次の 2 つの命題 (ア) と (イ) は同値であることを証明しなさい。

(ア) 行列 A は逆行列をもつ。

(イ) 条件 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたす実数 x, y は $x = y = 0$ に限る。

- (3) 実数 a, b, c, d が $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1$ をみたすとき、行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、行列 $E - A$ は逆行列をもつことを示しなさい。

