

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2026 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$\log$ を自然対数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $x > 0$ の範囲で不等式 $\log x > -\frac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを用いて、等式

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

が成り立つことを示しなさい。

- (2) 関数

$$f(x) = x \log x - x \quad (x > 0)$$

の増減を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形を描きなさい。ただし、変曲点は調べなくてよい。

- (3) a を $a > 0$ をみたす実数とする。 $x > 0$ の範囲で x の方程式

$$x^x = ae^x$$

を考える。この方程式が異なる 2 つの正の実数解を持つような a の値の範囲を求めなさい。

第 2 問

自然数 n に対し, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{x+1} dx$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)(k+2)}$ とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) I_1 の値を求めなさい。
- (2) $I_n + I_{n+1}$ を n を用いて表しなさい。
- (3) 自然数 n に対し, 等式 $S_n = I_1 + (-1)^{n-1}I_{n+1}$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めなさい。

第 3 問

a を $0 < a < 1$ をみたす実数とする。O (0, 0, 0) を原点とする座標空間内の 3 点 A (2a, 0, -1), B (-a, $\sqrt{3}a$, -1), C (-a, $-\sqrt{3}a$, -1) を考える。さらに, 3 点 A, B, C の定める平面上にない点 D (x, y, z) を考える。四面体 ABCD の重心 G とは,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$$

により定まる点である。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\triangle ABC$ の 3 辺 AB, AC, BC の長さをそれぞれ a を用いて表しなさい。
- (2) 四面体 ABCD の重心が G (0, 0, -a) のとき, 四面体 ABCD の体積 $V(a)$ を a を用いて表しなさい。
- (3) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき, (2) の $V(a)$ が最大となる a の値を求め, そのときの $V(a)$ の値を求めなさい。

第 4 問

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0)$$

と定める。 a を $a > 0$ をみたす実数とし、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = a + 1$ で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(a)$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい。
- (2) 不定積分 $\int x e^{-x} dx$ を求めなさい。
- (3) $V(a)$ を a を用いて表しなさい。
- (4) a が $a > 0$ の範囲を動くとき、 $V(a)$ が最大となる a の値を求めなさい。

第 5 問

r を $r > 1$ をみたす実数とし、座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(r-1, r-1)$, $B(r^2-1, r^2-1)$ を考える。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 $P(x, y)$ が $BP : OP = r : 1$ をみたしながら動くとき、点 P の軌跡を求めなさい。
- (2) (1) の点 P に対し、等式 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = r(r+1)(2r-2-x-y)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) (1) の点 P に対し、点 P と点 A が異なるならば等式 $\angle OPA = \angle APB$ が成り立つことを示しなさい。

第 6 問

複素数平面において、方程式

$$|z - 1 + i| = |z|$$

をみたす点 z 全体の集合として定められる直線を l とする。ただし、 i は虚数単位とする。
複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ は

$$\beta = \alpha + 1 + i, \quad \alpha\gamma = 1$$

をみたすとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 A が直線 l 上にあるとき、点 B も直線 l 上にあることを示しなさい。
- (2) 点 A が直線 l 上を動くとき、点 C の描く図形が円の一部分であることを示し、その図形を複素数平面上に図示しなさい。
- (3) 点 A が直線 l 上を動くとき、 $\triangle ABC$ の面積 S の最大値を求めなさい。ただし、3 点 A , B , C が一直線上にあるときは、 $S = 0$ とする。