

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2025 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について考える。

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 2, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n^3 b_n^4 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n b_n^3 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えなさい。

- (1) 数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \log_2 a_n - 2 \log_2 b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

- (2) 数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n = \log_2 a_n + 2 \log_2 b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。 $\{d_n\}$ の一般項を求めなさい。

- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

第 2 問

自然数 n に対し,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

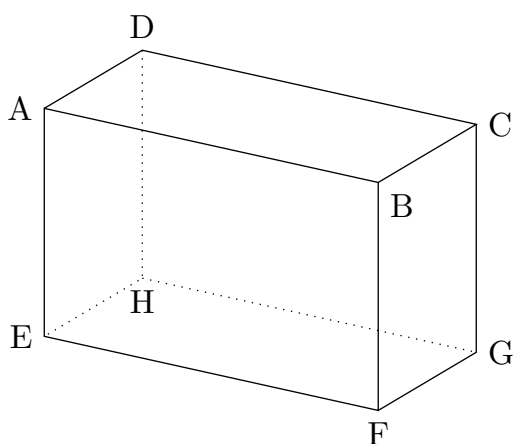
とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) I_1 と I_2 の値を求めなさい。
- (2) $\frac{I_{n+2}}{I_n}$ を求めなさい。必要ならば部分積分を用いてよい。
- (3) $(n+1)I_n I_{n+1}$ を求めなさい。

第 3 問

下の図の直方体 ABCD-EFGH において、 $AB = 3$, $AD = 1$, $AE = 2$ とする。 t は $0 < t < 1$ をみたす実数とする。線分 BF を $t : (1 - t)$ に内分する点を P とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\theta = \angle CPE$ とおく。 $\cos \theta$ を t を用いて表しなさい。
- (2) $\triangle CEP$ の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ を t を用いて表しなさい。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、(2) の $S(t)$ の最小値を求めなさい。また、そのときの t の値を求めなさい。



第 4 問

a は $a > 1$ をみたす実数とする。座標平面において、連立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq ax^2$$

の表す領域の面積を $S_1(a)$ とし、連立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq ax^2$$

の表す領域の面積を $S_2(a)$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $S_1(a)$ を a を用いて表しなさい。
- (2) $S_2(a)$ を a を用いて表しなさい。
- (3) a が $a > 1$ の範囲を動くとき、 $S_1(a) - 2S_2(a)$ の値が最大となる a の値を求めなさい。

第 5 問

$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とし, α を 0 でない複素数とする。ただし, i は虚数単位を表す。自然数 n に対して

$$b_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

と定め,

$$z_n = b_n w^n \alpha$$

と定める。以下の問いに答えなさい。

- (1) w を極形式で表しなさい。
- (2) $1 + w^2 + w^4$ の値を求めなさい。
- (3) $\frac{(z_{n+2} - z_n)(z_{n+4} - z_n)}{z_n^2}$ を求めなさい。
- (4) $\frac{(z_{n+1} - z_n)(z_{n+3} - z_n)(z_{n+5} - z_n)}{z_n^3}$ を求めなさい。

第 6 問

平面上で、点 O を中心とする半径 1 の円を考える。この円を内接円とする二等辺三角形 ABC (ただし $AB = AC$) を考える。点 O から辺 AB , BC に下ろした垂線をそれぞれ OD , OE とする。また、線分 BE の長さを x とし、 $\triangle ABC$ の面積と周の長さをそれぞれ S と L とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 AE の長さを y とする。 y を x を用いて表しなさい。
- (2) 線分 AD の長さを z とする。 z を x を用いて表しなさい。
- (3) x が $x > 1$ の範囲を動くとき、 $\frac{S}{L}$ の値を求めなさい。
- (4) x が $x > 1$ の範囲を動くとき、 $\frac{L^2}{S}$ の値が最小となる x の値を求めなさい。