

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2024年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

以下の問いに答えなさい。ただし、 $\log$ は自然対数とする。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ ($x > 0$) の増減を調べなさい。また、そのグラフの変曲点を求めなさい。
- (2) 3 以上の整数 n に対して、積分 $\int_2^n \frac{\log x}{x^2} dx$ の値を求めなさい。
- (3) 3 以上の整数 n に対して、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{k=3}^n \frac{\log k}{k^2} < \frac{1}{2} (1 + \log 2)$$

ただし、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい。

第 2 問

四面体 OABC において、O から平面 ABC に垂線 OP を引く。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 2, & |\vec{b}| &= 3, & |\vec{c}| &= 4, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= -1, & \vec{b} \cdot \vec{c} &= -4, & \vec{c} \cdot \vec{a} &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の大きさを求めなさい。

第 3 問

1, 2, 3, 4 の番号がついた玉が 1 個ずつあり、これらが 1 つの袋に入っている。机の上には 1, 2, 3, 4 の番号がついたカードが 1 枚ずつ置かれている。袋から玉を 1 個取り出し、ついている番号を確認して袋に戻し、もし同じ番号のカードが机の上に残っていればそのカードを取り除く。この操作を繰り返す。なお、すべてのカードが取り除かれても、操作は継続するものとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 操作を 3 回終えたとき、カードが 3 枚残っている確率を求めなさい。
- (2) 操作を 3 回終えたとき、1 の番号のカードが残っていない確率を求めなさい。
- (3) n を 2 以上の整数とする。操作を n 回終えたとき、カードがちょうど 2 枚残っている確率を求めなさい。
- (4) ちょうど 4 回目の操作でカードが取り除かれて 1 の番号のカードだけが残る確率を求めなさい。

第 4 問

正の整数 l, m, n が関係式 $l^2 + m^2 = n^2$ をみたすとする。このとき以下の問いに答えなさい。

- (1) 正の整数 k に対し, k^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 のいずれかになることを示しなさい。
- (2) l が奇数ならば m が偶数であることを, 背理法を用いて示しなさい。
- (3) l が奇数ならば m は 4 で割り切れることを示しなさい。

第 5 問

R を正の実数とする。複素数平面上で、点 a を中心とする半径 R の円 C を考え、 $0 < |z - a| < R$ をみたす点 z をとる。 a と z を結ぶ直線を l とし、 z を通り l に直交する直線と円 C の交点を p, q とする。さらに点 p, q における C の接線と l の交点を w とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 関係式

$$(w - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) $a = 0, R = 1$ とする。 z が $|z| < 1, \operatorname{Re} z = \frac{1}{4}$ をみたしながら動くとき、点 w はどのような図形を描くか求め、図示しなさい。ただし、 $\operatorname{Re} z$ は z の実部を表す。

第 6 問

自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対し,

$$f_1(x) = e^x - 1$$

$$f_2(x) = e^x - (1 + x)$$

$\dots$

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k$$

$\dots$

とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) 自然数 n に対し, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で, $0 \leq f_1(x) \leq ex$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) すべての自然数 n に対して, $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $0 \leq f_n(x) \leq e \cdot \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを小問 (1), (2) と数学的帰納法を用いて示しなさい。
- (4) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$