前期 **理系**

2024年度入学試験学力検査問題

数　　学

［ 理学部：数理科学科　　75分 ］

答案用紙　3**枚**

注　意

1. 監督員の合図があるまで，問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規，コンパスの使用を認めます。
   ただし，分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は，答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

（例）　受験番号　1234567X　の場合　⟶

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し，必ず配付された答案用紙に記入してください。
   答案用紙には，解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は，手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり，持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが，どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は，持ち帰ってください。また，試験終了時刻まで退室できません。

$\boxed{1}$ 正の整数 l，m，n が関係式 $l^2 + m^2 = n^2$ をみたすとする。このとき以下の問いに答えなさい。

(1) 正の整数 k に対し，k^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 のいずれかになることを示しなさい。

(2) l が奇数ならば m が偶数であることを，背理法を用いて示しなさい。

(3) l が奇数ならば m は 4 で割り切れることを示しなさい。

$\boxed{2}$ R を正の実数とする。複素数平面上で，点 a を中心とする半径 R の円 C を考え，$0 < |z - a| < R$ をみたす点 z をとる。a と z を結ぶ直線を l とし，z を通り l に直交する直線と円 C の交点を p，q とする。さらに点 p，q における C の接線と l の交点を w とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 関係式

$$(w - a)(\overline{z} - \overline{a}) = R^2$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) $a = 0$，$R = 1$ とする。z が $|z| < 1$，$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{1}{4}$ をみたしながら動くとき，点 w はどのような図形を描くか求め，図示しなさい。ただし，$\mathrm{Re}\, z$ は z の実部を表す。

$\boxed{3}$ 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対し，

$$f_1(x) = e^x - 1$$

$$f_2(x) = e^x - (1 + x)$$

$$\cdots$$

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\cdots$$

とおく。以下の問いに答えなさい。

(1) 自然数 n に対し，$f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$ が成り立つことを示しなさい。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，$0 \leqq f_1(x) \leqq ex$ が成り立つことを示しなさい。

(3) すべての自然数 n に対して，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $0 \leqq f_n(x) \leqq e \cdot \dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを小問 (1)，(2) と数学的帰納法を用いて示しなさい。

(4) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$