入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度： 2023年

試験時間： 150分

問題数： 6問

第　1　問

a を $0 < a < 1$ をみたす実数とし，

$$f(x) = \frac{10a}{a+2}\log x + 2\log(1-x) \qquad (0 < x < 1)$$

とする。ただし，log は自然対数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = f(x)$（$0 < x < 1$）が極大になる x がただ 1 つ存在することを示し，その x を a を用いて表しなさい。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を以下のように定める。$a_1 = \dfrac{1}{4}$ とする。$a = a_n$ としたとき x の関数 $y = f(x)$（$0 < x < 1$）が極大になる x の値を a_{n+1} とする。このとき a_2 の値を求めなさい。

(3) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めなさい。

第　2　問

関数

$$f(\theta) = 2\sin 3\theta - 3\sin\theta + 3\sqrt{3}\cos\theta$$

について，以下の問いに答えなさい。

(1)　$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$（$r > 0$，$-\pi \leqq \alpha < \pi$）の形に変形しなさい。

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値をそれぞれ求めなさい。

(3)　$x = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$\sin\left\{3\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)\right\} = 3\left(\dfrac{x}{2}\right) - 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^3$ であることを示しなさい。

(4)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値をそれぞれすべて求めなさい。

第　3　問

座標空間内に 4 点 A$(1,\ 0,\ 1)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ 0)$，P$(2,\ 2,\ 1)$ がある。2 点 A，B を通る直線を l とし，3 点 A，B，C を通る平面を α とする。

・ 点 A に関して点 P と対称な点を Q とする。すなわち線分 PQ の中点が A である。

・ 直線 l に関して点 P と対称な点を R とする。すなわち P，R を通る直線が l と垂直であり，線分 PR の中点が l 上にある。

・ 平面 α に関して点 P と対称な点を S とする。すなわち P，S を通る直線が α と垂直であり，線分 PS の中点が α 上にある。

このとき，以下の問いに答えなさい。

(1) 点 Q の座標を求めなさい。

(2) 点 R の座標を求めなさい。

(3) 点 S の座標を求めなさい。

(4) $\triangle$QRS の面積を求めなさい。

第 4 問

関数 $f(x)$ と定数 C が

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(x+t)\,dt = x + C$$

をみたすとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 定数 a，b を

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt, \quad b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$$

とするとき，関数 $f(x)$ を a，b を用いて表しなさい。

(2) 定数 a，b の値，および関数 $f(x)$ を求めなさい。

(3) 定数 C の値を求めなさい。

第　5　問

i を虚数単位とする。複素数 z が $z \neq 1$ をみたすとき，$g(z) = \dfrac{2z+4i}{z-1}$ とする。以下の問いに答えなさい。ただし，複素数の値を答えるとき，答えが実数でも純虚数でもない場合は $a+bi$（a，b は実数）の形にすること。

(1)　$g(u) = -3$ となる複素数 u を求めなさい。

(2)　$g(v) = 1-i$ となる複素数 v を求めなさい。

(3)　複素数 z が $|z| = 1$ かつ $z \neq 1$ をみたし，$w = g(z)$ の実部が 2 となるとする。このとき w を求めなさい。

第 6 問

$\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$ とし，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

と定める。以下の問いに答えなさい。

(1) x_2，x_3 の値を求めなさい。

(2) すべての自然数 r，s に対して，

$$x_{r+s+1} = x_{r+1}x_{s+1} - x_r x_s$$

が成り立つことを示しなさい。

(3) すべての自然数 n に対して，x_n と x_{n+1} がともに整数であることを数学的帰納法で示しなさい。

(4) m を 2 以上の自然数とする。すべての自然数 n に対して，x_{mn} が x_m の倍数であることを，n に関する数学的帰納法で示しなさい。