前期 **理系**

2023年度入学試験学力検査問題

数　　学

［ 理学部：数理科学科　　75分 ］

答案用紙　3**枚**

注　意

1. 監督員の合図があるまで，問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規，コンパスの使用を認めます。
   ただし，分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は，答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

（例）　受験番号　1234567X　の場合　⟶

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し，必ず配付された答案用紙に記入してください。
   答案用紙には，解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は，手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり，持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが，どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は，持ち帰ってください。また，試験終了時刻まで退室できません。

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ と定数 C が

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(x+t)\,dt = x + C$$

をみたすとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 定数 a，b を

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt, \quad b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$$

とするとき，関数 $f(x)$ を a，b を用いて表しなさい。

(2) 定数 a，b の値，および関数 $f(x)$ を求めなさい。

(3) 定数 C の値を求めなさい。

$\boxed{2}$ i を虚数単位とする。複素数 z が $z \neq 1$ をみたすとき，$g(z) = \dfrac{2z+4i}{z-1}$ とする。以下の問いに答えなさい。ただし，複素数の値を答えるとき，答えが実数でも純虚数でもない場合は $a+bi$（a，b は実数）の形にすること。

(1) $g(u) = -3$ となる複素数 u を求めなさい。

(2) $g(v) = 1 - i$ となる複素数 v を求めなさい。

(3) 複素数 z が $|z| = 1$ かつ $z \neq 1$ をみたし，$w = g(z)$ の実部が 2 となるとする。このとき w を求めなさい。

$\boxed{3}$ $\alpha = 2 + \sqrt{3}$，$\beta = 2 - \sqrt{3}$ とし，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

と定める。以下の問いに答えなさい。

(1) x_2，x_3 の値を求めなさい。

(2) すべての自然数 r，s に対して，

$$x_{r+s+1} = x_{r+1}x_{s+1} - x_r x_s$$

が成り立つことを示しなさい。

(3) すべての自然数 n に対して，x_n と x_{n+1} がともに整数であることを数学的帰納法で示しなさい。

(4) m を 2 以上の自然数とする。すべての自然数 n に対して，x_{mn} が x_m の倍数であることを，n に関する数学的帰納法で示しなさい。