

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2022年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

$f(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ とし, θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸と y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = \frac{1}{\tan \theta} \sin x$ の $0 < x < \pi$ における共有点の x 座標を $a(\theta)$ とする。 $a(\theta)$ を θ の式で表しなさい。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq a(\theta)$) と曲線 $y = \frac{1}{\tan \theta} \sin x$ ($0 \leq x \leq a(\theta)$) と y 軸で囲まれた図形の面積を $S(\theta)$ とする。 $3S(\theta) = S$ が成り立つとき θ の値を求めなさい。

第 2 問

a を正の実数とし、 O を原点とする座標空間において、3 点 $A(2a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に直交する単位ベクトルをすべて求めなさい。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ が (1) で求めた単位ベクトルと平行になるような実数 s, t を求めなさい。
- (3) O を中心とする球面が平面 α と点 P で接しているとき、 P の座標と球面の半径 $r(a)$ を求めなさい。
- (4) a が正の実数全体を動くとき、 $\frac{r(a)^2}{a}$ の最大値とそのときの a の値を求めなさい。

第 3 問

a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 4x^2 + (a - 2)x - 2(a - 6)$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と表すとき、 $f'(4) = f(4)$ をみたす a の値を求めなさい。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は a の値に無関係な正の実数解をもつことを示し、その実数解を求めなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が 2 重解をもつときの a の値をすべて求めなさい。それぞれの a の値に対して、方程式 $f(x) = 0$ のすべての解を求めなさい。

第 4 問

$\log$ を自然対数とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^n \log k$$

と定める。以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 以上の自然数 k に対して, 次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_{k-1}^k \log x \, dx < \log k < \int_k^{k+1} \log x \, dx$$

- (2) 2 以上の自然数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_1^n \log x \, dx < a_n < \int_2^{n+1} \log x \, dx$$

- (3) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n \log n} = 1$$

第 5 問

O を原点とする複素数平面上に 2 点 $A(\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3} + i)$ がある。点 T を実軸上にとり、点 A と異なる点 U を直線 AB 上にとる。点 U を点 T のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を V とする。点 V が直線 OB 上にあるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 T を表す実数を t とする。点 U, V を表す複素数をそれぞれ $\sqrt{3} + iu$, $(\sqrt{3} + i)v$ とするとき、実数 u , v を t の式で表しなさい。
- (2) 点 T が線分 OA 上を動くとき $\triangle TUV$ の面積の最大値・最小値とそのときの t の値を求めなさい。ただし、線分 OA は両端を含むものとする。

第 6 問

自然数 n に対して、 $m^2 - m$ が n 以下となる自然数 m の個数を a_n とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) a_{20} を求めなさい。
- (2) $\sum_{k=2}^{19} a_k$ を求めなさい。
- (3) $6a_n = n$ をみたす自然数 n を求めなさい。