前期 **理系**

2022年度入学試験学力検査問題

数　　学

［ 理学部：数理科学科　　75分 ］

答案用紙　3**枚**

注　意

1. 監督員の合図があるまで，問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規，コンパスの使用を認めます。
   ただし，分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は，答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

（例）　受験番号　1234567X　の場合　⟶

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し，必ず配付された答案用紙に記入してください。
   答案用紙には，解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は，手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり，持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが，どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は，持ち帰ってください。また，試験終了時刻まで退室できません。

1 $\log$ を自然対数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \log k$$

と定める。以下の問いに答えなさい。

(1) 2 以上の自然数 k に対して，次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_{k-1}^{k} \log x\, dx < \log k < \int_{k}^{k+1} \log x\, dx$$

(2) 2 以上の自然数 n に対して，次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_{1}^{n} \log x\, dx < a_n < \int_{2}^{n+1} \log x\, dx$$

(3) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n \log n} = 1$$

2 O を原点とする複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{3})$，$\mathrm{B}(\sqrt{3}+i)$ がある。点 T を実軸上にとり，点 A と異なる点 U を直線 AB 上にとる。点 U を点 T のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を V とする。点 V が直線 OB 上にあるとき，以下の問いに答えなさい。

(1) 点 T を表す実数を t とする。点 U，V を表す複素数をそれぞれ $\sqrt{3}+iu$，$(\sqrt{3}+i)v$ とするとき，実数 u，v を t の式で表しなさい。

(2) 点 T が線分 OA 上を動くとき △TUV の面積の最大値・最小値とそのときの t の値を求めなさい。ただし，線分 OA は両端を含むものとする。

$\boxed{3}$ 自然数 n に対して，$m^2 - m$ が n 以下となる自然数 m の個数を a_n とする。以下の問いに答えなさい。

(1) a_{20} を求めなさい。

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{19} a_k$ を求めなさい。

(3) $6a_n = n$ をみたす自然数 n を求めなさい。