

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2021 年

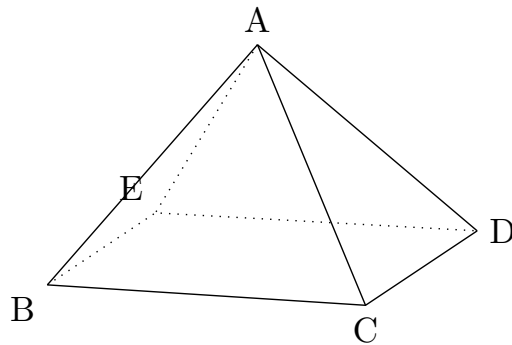
試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

正方形 BCDE を底面とし、辺の長さがすべて 1 である四角錐 A-BCDE を考える。
 $\vec{a} = \vec{CA}$, $\vec{b} = \vec{CB}$, $\vec{d} = \vec{CD}$ とする。辺 BC を $1:2$ に内分する点を P とし、辺 DE
を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし、 t は $0 < t < 1$ をみたす実数であるとする。
このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $\vec{AP}$ と $\vec{AQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, t を用いて表しなさい。
- (2) 内積 $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ を t を用いて表しなさい。
- (3) $\triangle APQ$ の面積 S を t を用いて表しなさい。
- (4) $\triangle APQ$ の面積 S が最小となる t の値を求め、そのときの S の値を求めなさい。



第 2 問

a を正の実数とする。関数

$$f(x) = (\log x)^2 + 2a \log x \quad (x > 0)$$

に対し、以下の問いに答えなさい。ただし、 $\log x$ は自然対数とする。

- (1) $f(x)$ の最小値と、そのときの x の値を求めなさい。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの凹凸を調べ、変曲点を求めなさい。
- (3) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めなさい。
- (4) $y = f(x)$ のグラフの変曲点が x 軸上にあるとする。このとき、 a の値を求め、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

第 3 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 実数 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲にあり, $\sin 2\theta = \sin 3\theta$ をみたすとする。 $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (2) 関数 $f(x) = 3 \cos 2x - 2 \cos 3x$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めなさい。
- (3) (2) で $f(x)$ が最大値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めなさい。

第 4 問

α を $\alpha > 1$ をみたす有理数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) β を $\beta > 0$ をみたす有理数とし, t, u を $0 < t < u$ をみたす実数とする。このとき, $t^\beta < u^\beta$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) t を正の実数とする。このとき, $1 + t^\alpha < (1 + t)^\alpha$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) x, y を正の実数とする。このとき, $x^\alpha + y^\alpha < (x + y)^\alpha$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) n を 2 以上の自然数とし, $x_1, x_2, \dots, x_n$ を正の実数とする。このとき,

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha < (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^\alpha$$

が成り立つことを示しなさい。

第 5 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) a, b, c を実数として、 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおき、 $P(-1 + i) = 0$ であるとする。ただし、 i は虚数単位とする。
- (i) b および c を a を用いて表しなさい。
- (ii) $P(-1 - i) = 0$ となることを示し、 $P(x) = 0$ のすべての解の実部が負となるための条件を、 a を用いて表しなさい。
- (2) s, t, u を実数として、 $Q(x) = x^3 + sx^2 + tx + u$ とおき、 $Q(-1) = 0$ であるとする。このとき、 $Q(x) = 0$ のすべての解の実部が負となるための条件を、 t および u を用いて表しなさい。

第 6 問

p を実数とし、座標平面において

$$C: 4x^2 - y^2 = 1, \quad l: y = px + 1$$

によって与えられる双曲線 C と直線 l を考える。 C と l が異なる 2 つの共有点をもつとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) p の範囲を求めなさい。
- (2) C と l の共有点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし、 $x_1 < x_2$ であるとする。このとき、線分 P_1P_2 の中点の座標を求めなさい。
- (3) C の 2 つの漸近線と l の交点を $Q_1(x_3, y_3)$, $Q_2(x_4, y_4)$ とする。ただし、 $x_3 < x_4$ であるとする。このとき、線分 Q_1Q_2 の中点の座標を求めなさい。
- (4) (2) の P_1 , P_2 および (3) の Q_1 , Q_2 に対し、 $P_1Q_1 = P_2Q_2$ が成り立つことを示しなさい。