

前期

理系

2021 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 α を $\alpha > 1$ をみたす有理数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) β を $\beta > 0$ をみたす有理数とし, t, u を $0 < t < u$ をみたす実数とする。このとき, $t^\beta < u^\beta$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) t を正の実数とする。このとき, $1 + t^\alpha < (1 + t)^\alpha$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) x, y を正の実数とする。このとき, $x^\alpha + y^\alpha < (x + y)^\alpha$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) n を 2 以上の自然数とし, $x_1, x_2, \dots, x_n$ を正の実数とする。このとき,

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha < (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^\alpha$$

が成り立つことを示しなさい。

2 以下の問いに答えなさい。

- (1) a, b, c を実数として, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおき, $P(-1 + i) = 0$ であるとする。ただし, i は虚数単位とする。
 - (i) b および c を a を用いて表しなさい。
 - (ii) $P(-1 - i) = 0$ となることを示し, $P(x) = 0$ のすべての解の実部が負となるための条件を, a を用いて表しなさい。
- (2) s, t, u を実数として, $Q(x) = x^3 + sx^2 + tx + u$ とおき, $Q(-1) = 0$ であるとする。このとき, $Q(x) = 0$ のすべての解の実部が負となるための条件を, t および u を用いて表しなさい。

3 p を実数とし、座標平面において

$$C : 4x^2 - y^2 = 1, \quad l : y = px + 1$$

によって与えられる双曲線 C と直線 l を考える。 C と l が異なる 2 つの共有点をもつとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) p の範囲を求めなさい。
- (2) C と l の共有点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし、 $x_1 < x_2$ であるとする。このとき、線分 P_1P_2 の中点の座標を求めなさい。
- (3) C の 2 つの漸近線と l の交点を $Q_1(x_3, y_3)$, $Q_2(x_4, y_4)$ とする。ただし、 $x_3 < x_4$ であるとする。このとき、線分 Q_1Q_2 の中点の座標を求めなさい。
- (4) (2) の P_1 , P_2 および (3) の Q_1 , Q_2 に対し、 $P_1Q_1 = P_2Q_2$ が成り立つことを示しなさい。

