

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2020 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

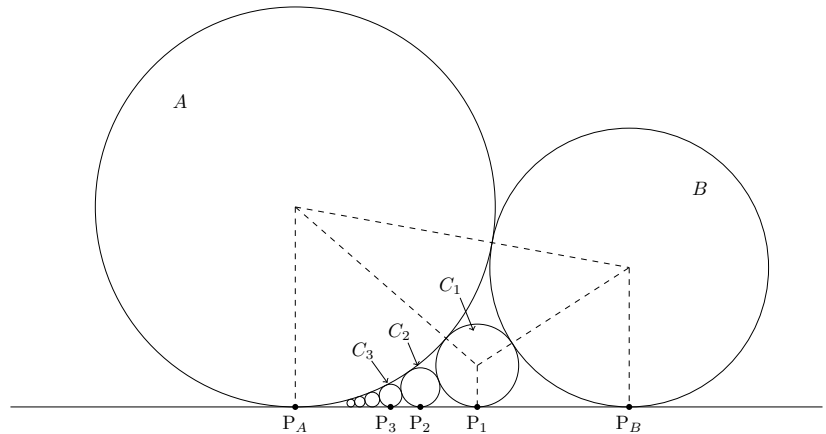
$f(x) = \log(x+1)$ とするとき、以下の問いに答えなさい。ただし、 $\log$ は自然対数とする。

- (1) $f(x)$ の不定積分 $\int f(x) dx$ を求めなさい。
- (2) 自然数 n に対し、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(n, f(n))$ における接線を l_n とする。曲線 $y = f(x)$ と接線 l_n と直線 $x = 2n$ で囲まれた図形の面積 S_n を求めなさい。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めなさい。

第 2 問

円 A と円 B と直線 l がそれぞれ異なる点で接しているとする。 A と l の接点を P_A とし、 B と l の接点を P_B とする。 C_1 を A と B と l に接する円とする。ただし、 C_1 と l の接点 P_1 は、線分 P_AP_B 上にあるとする。また、 C_2 を A と C_1 と l に接する円とする。ただし、 C_2 と l の接点 P_2 は、線分 P_AP_1 上にあるとする。以下同様に、自然数 n に対し、 C_{n+1} は A と C_n と l に接する円であり、 C_{n+1} と l の接点 P_{n+1} は線分 P_AP_n 上にあるとする。 A の半径を a とし、 B の半径を b とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 P_AP_B の長さを a, b を用いて表しなさい。
- (2) C_1 の半径を r_1 とするとき、 $\frac{1}{\sqrt{r_1}}$ を a, b を用いて表しなさい。
- (3) C_n の半径を r_n とするとき、 $\frac{1}{\sqrt{r_n}}$ を a, b, n を用いて表しなさい。
- (4) a と b が $a+b=1$ を満たしながら動くとき、 C_n の半径 r_n の最大値を n を用いて表しなさい。また、そのときの a の値を n を用いて表しなさい。



第 3 問

図 1 のように，グラウンドにかかれた四角形 $A_1A_2A_3A_4$ を考える。 $i = 1, 2, 3, 4$ に対し，頂点 A_i に生徒 S_i が立っているとする。この状態から出発して，自然数 n に対し，次の試行 (*) を n 回続けて行った後に，生徒 S_1 が頂点 A_i に立っている確率を $p_i(n)$ とする。

(*) 四角形の辺をひとつ選び，その両端に立っている生徒の位置を交換する。ただし，四角形の辺の選び方は同様に確からしいとする。

例えば，図 2 は， $n = 2$ のとき，1 回目の試行で辺 A_1A_2 を選び，2 回目の試行で辺 A_2A_3 を選んだ後の状態である。以下の問いに答えなさい。

- (1) $p_1(1)$, $p_2(1)$, $p_3(1)$, $p_4(1)$ を求めなさい。
- (2) $i = 1, 2, 3, 4$ とする。このとき， $p_i(n+1)$ を $p_{i-1}(n)$, $p_i(n)$, $p_{i+1}(n)$ を用いて表しなさい。ただし， $p_0(n) = p_4(n)$, $p_5(n) = p_1(n)$ とする。
- (3) $p_2(n) = p_4(n) = \frac{1}{4}$ であることを示しなさい。
- (4) $p_1(n)$ を n を用いて表しなさい。

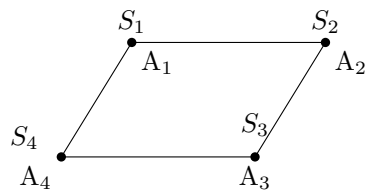


図 1

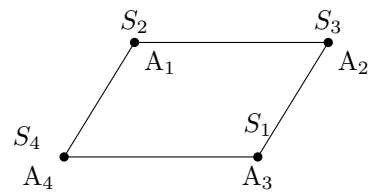


図 2

第 4 問

方程式 $x^2 - xy + y^2 = 3$ の表す座標平面上の曲線で囲まれた図形を D とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) この方程式を y について解くと,

$$y = \frac{1}{2} \left\{ x \pm \sqrt{3(4 - x^2)} \right\}$$

となることを示しなさい。

- (2) $\sqrt{3} \leq x \leq 2$ をみたす実数 x に対し, $f(x) = \frac{1}{2} \left\{ x - \sqrt{3(4 - x^2)} \right\}$ とする。 $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。また, そのときの x の値を求めなさい。
- (3) $0 \leq x \leq 2$ をみたす実数 x に対し, $g(x) = \frac{1}{2} \left\{ x + \sqrt{3(4 - x^2)} \right\}$ とする。 $g(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。また, そのときの x の値を求めなさい。
- (4) 図形 D の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分の面積を求めなさい。

第 5 問

O を原点とする座標平面の x 軸上に点 A があり、第 1 象限に点 B がある。A の x 座標は正であるとし、 $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$, $AB = 2$ とする。原点 O から直線 AB に下ろした垂線を OC とし、点 B から直線 OA に下ろした垂線を BD とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 OA, OB の長さを求めなさい。
- (2) 点 C の座標を求めなさい。
- (3) 実数 t は $0 < t < 1$ の範囲を動くとする。線分 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を P_t とし、線分 CD を $(1-t) : t$ に内分する点を Q_t とする。内積 $\overrightarrow{OP_t} \cdot \overrightarrow{OQ_t}$ の最小値を求めなさい。また、そのときの t の値を求めなさい。

第 6 問

$\alpha = \frac{1+i}{2}$ とする。ただし、 i は虚数単位を表し、複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。以下の問いに答えなさい。

- (1) 複素数 z に対し、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ は実数になることを示しなさい。
- (2) 複素数平面上で点 w が円 $|w| = 1$ 上を動くとき、点 $z = 4w + \frac{3}{w}$ の描く図形を求めなさい。
- (3) 点 z が (2) で求めた図形の上を動くとき、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの z の値を求めなさい。