

前期

理系

2020 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

- 1 方程式 $x^2 - xy + y^2 = 3$ の表す座標平面上の曲線で囲まれた図形を D とする。
以下の問いに答えなさい。

- (1) この方程式を y について解くと、

$$y = \frac{1}{2} \left\{ x \pm \sqrt{3(4 - x^2)} \right\}$$

となることを示しなさい。

- (2) $\sqrt{3} \leq x \leq 2$ をみたす実数 x に対し、 $f(x) = \frac{1}{2} \left\{ x - \sqrt{3(4 - x^2)} \right\}$ とする。 $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの x の値を求めなさい。
- (3) $0 \leq x \leq 2$ をみたす実数 x に対し、 $g(x) = \frac{1}{2} \left\{ x + \sqrt{3(4 - x^2)} \right\}$ とする。 $g(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの x の値を求めなさい。
- (4) 図形 D の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分の面積を求めなさい。

- 2 O を原点とする座標平面の x 軸上に点 A があり、第 1 象限に点 B がある。 A の x 座標は正であるとし、 $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$, $AB = 2$ とする。原点 O から直線 AB に下ろした垂線を OC とし、点 B から直線 OA に下ろした垂線を BD とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 OA , OB の長さを求めなさい。
- (2) 点 C の座標を求めなさい。
- (3) 実数 t は $0 < t < 1$ の範囲を動くとする。線分 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を P_t とし、線分 CD を $(1 - t) : t$ に内分する点を Q_t とする。内積 $\overrightarrow{OP_t} \cdot \overrightarrow{OQ_t}$ の最小値を求めなさい。また、そのときの t の値を求めなさい。

3 $\alpha = \frac{1+i}{2}$ とする。ただし、 i は虚数単位を表し、複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。以下の問いに答えなさい。

- (1) 複素数 z に対し、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ は実数になることを示しなさい。
- (2) 複素数平面上で点 w が円 $|w| = 1$ 上を動くとき、点 $z = 4w + \frac{3}{w}$ の描く図形を求めなさい。
- (3) 点 z が (2) で求めた図形の上を動くとき、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの z の値を求めなさい。

