

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2019 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$\alpha = -4 - 2i$, $\beta = 2 + i$ とする。ただし, i は虚数単位を表す。複素数平面において $|z - \alpha| = 2|z - \beta|$ をみたす点 z の集合を C とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) C は複素数平面上の円になることを示し, その円の中心と半径を求めなさい。
- (2) 点 z が $z = 0$ を除いて C 上を動くとき, $w = \frac{1}{z}$ で定まる点 w が複素数平面上で直線を描くことを示しなさい。
- (3) 複素数平面上の 2 点 $A(\alpha)$ と $B(\beta)$ を通る直線を l とし, (2) で示した w の描く直線を m とする。 l と m が 1 点で交わることを示し, l と m のなす角 θ $\left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ について $\cos \theta$ の値を求めなさい。

第 2 問

n を自然数とするとき、以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$ の導関数を求めなさい。

(2) $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$ とおく。 $\frac{1}{(x^2 + 1)^n} = (x)' \times \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$ であることを利用して、等式

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left\{ (2n - 1)I_n + \frac{1}{2^n} \right\}$$

が成り立つことを示しなさい。

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$ の値を求めなさい。

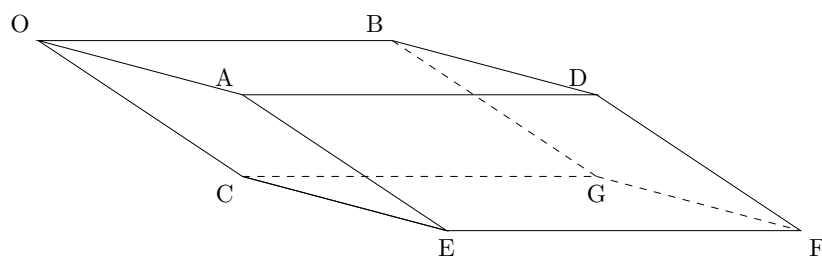
第 3 問

図のような平行六面体 OADB-CEFG において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

$$|\vec{a}| = |\vec{c}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 5, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$$

とする。3 点 C, E, F の定める平面を α とし、O を通り α に垂直な直線を l とする。平面 α と直線 l の交点を H とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しなさい。
- (2) $\overrightarrow{OH}$ の大きさを求めなさい。
- (3) 平行六面体 OADB-CEFG の体積を求めなさい。



第 4 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 三角関数の加法定理を用いて、次の等式を示しなさい。

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

- (2) N を自然数とする。次の等式を示しなさい。

$$(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos Nx) \times 2 \sin \frac{x}{2} = \sin \left(Nx + \frac{x}{2} \right) - \sin \frac{x}{2}$$

- (3) $0 < x < 2\pi$ の範囲で

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$$

をみたす x をすべて求めなさい。

第 5 問

関数 $f(x)$ は閉区間 $[0, \pi]$ で連続であり, $0 \leq x < y \leq \pi$ ならばつねに $f(x) \leq f(y)$ が成り立つとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 自然数 n に対し, 不等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx \leq \int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx$$

が成り立つことを示しなさい。

- (2) 自然数 n と整数 k に対し, 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx$$

を求めなさい。

- (3)

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| dx$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを示しなさい。

第 6 問

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) C 上の点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式と法線の方程式を求めなさい。
- (2) 点 $P(a, b)$ から C に相異なる 2 本の接線を引くことができるための、 a と b についての条件を求めなさい。
- (3) $a > 0$ のとき、点 $P(a, b)$ から C に相異なる 3 本の法線を引くことができるための、 a と b についての条件を求めなさい。