

前期

理系

2019年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 以下の問いに答えなさい。

(1) 三角関数の加法定理を用いて、次の等式を示しなさい。

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

(2) N を自然数とする。次の等式を示しなさい。

$$(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos Nx) \times 2 \sin \frac{x}{2} = \sin \left(Nx + \frac{x}{2} \right) - \sin \frac{x}{2}$$

(3) $0 < x < 2\pi$ の範囲で

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$$

をみたす x をすべて求めなさい。

2 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0, \pi]$ で連続であり、 $0 \leq x < y \leq \pi$ ならばつねに $f(x) \leq f(y)$ が成り立つとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 自然数 n に対し、不等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}k\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx \leq \int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{n}(k+1)\right) \int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) 自然数 n と整数 k に対し、定積分

$$\int_{\frac{\pi}{n}k}^{\frac{\pi}{n}(k+1)} |\sin nx| dx$$

を求めなさい。

(3)

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| dx$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ が収束することを示しなさい。

3 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) C 上の点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式と法線の方程式を求めなさい。
- (2) 点 $P(a, b)$ から C に相異なる 2 本の接線を引くことができるための、 a と b についての条件を求めなさい。
- (3) $a > 0$ のとき、点 $P(a, b)$ から C に相異なる 3 本の法線を引くことができるための、 a と b についての条件を求めなさい。

