

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2018年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

a を $a > 1$ をみたす実数とし、2つの放物線 $y = x^2$ と $y = a(x^2 - 1)$ をそれぞれ C_1 , C_2 とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) C_1 と C_2 の2つの交点の座標を求めなさい。
- (2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めなさい。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値, およびそのときの $S(a)$ の値を求めなさい。

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0 \text{ のとき}) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたしているとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $a_1 = \frac{9}{4}$ であるとき, a_7 の値を求めなさい。
- (2) $a_1 = 4$ であるとき, $\sum_{i=1}^{40} a_i$ の値を求めなさい。
- (3) $0 \leq a_1 \leq 1$ であり, かつ $\sum_{i=1}^{22} a_i = 0$ をみたすとき, a_1 の値を求めなさい。

第 3 問

空間において、点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C をとる。ただし、4 点 O, A, B, C は同一平面上にはないとする。3 点 O, A, C が定める平面 OAC と平面 OAB のなす角を α とし、平面 OAB と平面 OBC のなす角を β とし、さらに平面 OBC と平面 OAC のなす角を γ とする。また、 $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 平面 OAB 上に点 P を、直線 CP が平面 OAB と直交するようにとる。また、直線 OA 上に点 F を、直線 PF が直線 OA と直交するようにとる。直線 OA と直線 CF が直交することを示しなさい。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を $\sin b$, $\sin c$, および $\sin \alpha$ を用いて表しなさい。
- (3) 以下の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

第 4 問

以下の問いに答えなさい。

(1) $x = \tan \theta$ とおくことにより, 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ の値を求めなさい。

(2) k を 0 以上の整数とし, x を実数とする。次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$-x^{2k+2} \leq \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \leq x^{2k+2}$$

(3) $\int_0^1 \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ であることと, (1) および (2) を利用して,
無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の和を求めなさい。

第 5 問

a, b を $(a, b) \neq (0, 0)$ をみたす 0 以上の実数とし, xy 平面上の 2 点 $A(0, a)$ および $B(b, 0)$ を頂点とする正方形を $ABCD$ とする。ただし, 点 C または点 D は第 1 象限にあるとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 C, D の座標をそれぞれ求めなさい。また, 正方形 $ABCD$ の周および内部が連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x \\ 0 \leq y \\ y \leq -2x + 4 \end{cases}$$

の表す領域に含まれるとき, 点 (a, b) の動く範囲を座標平面上に図示しなさい。

- (2) 点 (a, b) が (1) で求めた範囲を動くとき, 正方形 $ABCD$ の面積 S が最大となるような (a, b) を求めなさい。また, そのときの S の値を求めなさい。
- (3) 点 (a, b) が (1) の範囲を動き, 点 C または点 D のうち少なくとも一方が直線 $y = -2x + 4$ の上を動くとき, 正方形 $ABCD$ の面積 S が最小となるような (a, b) を求めなさい。また, そのときの S の値を求めなさい。

第 6 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 正の整数 p, q, f および整数 r が次の関係をみたしているとする。

$$p = fq + r$$

ただし、 $0 \leq r < q$ とする。このとき整数 d が p と q の公約数であることと、 d が q と r の公約数であることは同値であることを示しなさい。

- (2) 正の整数 k, m の最大公約数を $\gcd(k, m)$ で表す。 p, q を、 $p > q$ をみたす正の整数とする。また、 $n \geq 2$ とし、 $2n - 1$ 個の正の整数 $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$ が次の関係をみたしているとする。

$$\begin{aligned} p &= r_1 \\ q &= r_2 \\ r_1 &= f_1 r_2 + r_3, & r_3 < r_2 \\ r_2 &= f_2 r_3 + r_4, & r_4 < r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= f_{n-2} r_{n-1} + r_n, & r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= f_{n-1} r_n \end{aligned}$$

このとき、 $\gcd(p, q) = \gcd(r_j, r_{j+1})$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) が成り立つことを j に関する数学的帰納法で示しなさい。

- (3) p と q を互いに素な正の整数とする。このとき、 $ap + bq = 1$ をみたす整数 a, b が存在することを示しなさい。