

前期

理系

2018年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 以下の問いに答えなさい。

- (1) $x = \tan \theta$ とおくことにより、定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ の値を求めなさい。
- (2) k を 0 以上の整数とし、 x を実数とする。次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$-x^{2k+2} \leq \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} \leq x^{2k+2}$$

- (3) $\int_0^1 \sum_{n=1}^{k+1} (-x^2)^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ であることと、(1) および (2) を利用して、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の和を求めなさい。

2 a, b を $(a, b) \neq (0, 0)$ をみたす 0 以上の実数とし、 xy 平面上の 2 点 A $(0, a)$ および B $(b, 0)$ を頂点とする正方形を ABCD とする。ただし、点 C または点 D は第 1 象限にあるとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 C, D の座標をそれぞれ求めなさい。また、正方形 ABCD の周および内部が連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x \\ 0 \leq y \\ y \leq -2x + 4 \end{cases}$$

の表す領域に含まれるとき、点 (a, b) の動く範囲を座標平面上に図示しなさい。

- (2) 点 (a, b) が (1) で求めた範囲を動くとき、正方形 ABCD の面積 S が最大となるような (a, b) を求めなさい。また、そのときの S の値を求めなさい。
- (3) 点 (a, b) が (1) の範囲を動き、点 C または点 D のうち少なくとも一方が直線 $y = -2x + 4$ の上を動くとき、正方形 ABCD の面積 S が最小となるような (a, b) を求めなさい。また、そのときの S の値を求めなさい。

3 以下の問いに答えなさい。

- (1) 正の整数 p, q, f および整数 r が次の関係をみたしているとする。

$$p = fq + r$$

ただし, $0 \leq r < q$ とする。このとき整数 d が p と q の公約数であることと, d が q と r の公約数であることは同値であることを示しなさい。

- (2) 正の整数 k, m の最大公約数を $\gcd(k, m)$ で表す。 p, q を, $p > q$ をみたす正の整数とする。また, $n \geq 2$ とし, $2n - 1$ 個の正の整数 $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$ が次の関係をみたしているとする。

$$p = r_1$$

$$q = r_2$$

$$r_1 = f_1 r_2 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

$$r_2 = f_2 r_3 + r_4, \quad r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = f_{n-2} r_{n-1} + r_n, \quad r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = f_{n-1} r_n$$

このとき, $\gcd(p, q) = \gcd(r_j, r_{j+1})$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) が成り立つことを j に関する数学的帰納法で示しなさい。

- (3) p と q を互いに素な正の整数とする。このとき, $ap + bq = 1$ をみたす整数 a, b が存在することを示しなさい。

