

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

n を自然数とし、 e を自然対数の底とする。関数

$$f(x) = x^{n-1}e^{-x}$$

について、以下の問いに答えなさい。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $x \geq 0$ のとき $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを、 n に関する数学的帰納法によって示しなさい。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めなさい。
- (3) $n \geq 3$ の場合に、 $x > 0$ の範囲における $f(x)$ の最大値、およびそのときの x の値を求めなさい。また、 $x > 0$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めなさい。

第 2 問

複素数平面上の原点 O と 2 点 $A(2 - 4\sqrt{3}i)$, $B(3 + \sqrt{3}i)$ を考える。ただし, i を虚数単位とする。三角形 OAB の外側に, 3 辺 AB , BO , OA をそれぞれ 1 辺とする正三角形 ALB , BMO , ONA を作る。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 L , M , N を表す複素数をそれぞれ求めなさい。
- (2) 直線 OL と直線 AM の交点を P とする。点 P を表す複素数を求めなさい。
- (3) 3 点 B , P , N が一直線上にあることを示しなさい。

第 3 問

x は $0 \leq x \leq 1$ をみたす実数とし, e は自然対数の底とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 定積分 $\int_x^{x+1} |1-t|e^{1-t} dt$ を求めなさい。

(2) 定積分 $\int_x^{x+1} |\pi \sin(\pi t)| dt$ を求めなさい。

(3) 関数

$$f(x) = \int_x^{x+1} \{|1-t|e^{1-t} - |\pi \sin(\pi t)|\} dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めなさい。

第 4 問

正の実数 h と関数 $f(x) = x^4$ に対し、以下の問いに答えなさい。

(1) $F(h) = \int_{1-h}^{1+h} f(x) dx$ を h の整式として表しなさい。

(2) 放物線 $y = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ が 3 点

$$(1-h, f(1-h)), \quad (1, f(1)), \quad (1+h, f(1+h))$$

を通るとき、 c の値を求めなさい。また、 a と b を h の整式としてそれぞれ表しなさい。

(3) (2) で求めた a, b, c に対して、 $G(h) = \int_{1-h}^{1+h} \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} dx$ を h の整式として表しなさい。

(4) (1) の $F(h)$ と (3) の $G(h)$ に対して、 $\frac{F(h) - G(h)}{h^5}$ を求めなさい。

第 5 問

座標空間に 4 点

$$A(-3, 0, 2), \quad B(1, 4, 0), \quad C(0, 3, 5), \quad D(2, 2, 7)$$

をとる。A, B を通る直線を l とし, C, D を通る直線を m とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) l と m が垂直であることを示しなさい。
- (2) P を l 上の点とし, Q を m 上の点とする。 $\overrightarrow{PQ}$ が $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ の両方に垂直であるとき, P, Q の座標をそれぞれ求めなさい。
- (3) K, L を l 上の異なる 2 点とし, M, N を m 上の異なる 2 点とする。 $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{AB}$ は同じ向きに平行であり, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CD}$ は同じ向きに平行であるとする。また, 3 つの線分 KL, LM, MN は同じ立方体の 3 つの辺であるとする。このとき, 線分 KN の中点の座標を求めなさい。

第 6 問

各項が実数である無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対し, 関数

$$f_n(x) = \frac{a_n x - b_n}{(2^{n+1} - 2)x - (2^{n+1} - 1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x)) \quad \left(x \neq \frac{3}{2}, \quad x \neq \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+2} - 2} \right)$$

が成り立つとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $f_2(x)$ と a_2 , b_2 を求めなさい。
- (2) $t = f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = \dots$ をみたす実数 t をすべて求めなさい。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めなさい。