

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2016 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

a と b を $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b < 1$ をみたす定数とする。数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + b) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$c = 1 - \sqrt{1-b}$ とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) $0 \leq a_n \leq 1$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) $a_{n+1} - c = \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ が成り立つことを示しなさい。

第 2 問

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ は次の等式をみたすとする。

$$f(x) = 2x - \tan x + \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t) \cos t \, dt$$

以下の問いに答えなさい。

- (1) 不定積分 $\int x \cos x \, dx$ を求めなさい。
- (2) $f(0)$ の値を求めなさい。
- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値を求めなさい。

第 3 問

a と b は $a^2 > b$ をみたす実数であるとする。座標平面において、点 $P(a, b)$ から曲線 $y = x^2$ に引いた 2 つの接線の接点をそれぞれ Q, R とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を a と b の式で表しなさい。
- (2) 三角形 PQR の面積 S を a と b の式で表しなさい。
- (3) 直線 $y = 2x - 3$ を l とする。点 P が l 上を動くとき、(2) の S の最小値を求めなさい。

第 4 問

曲線 $y = \log x$ を C で表す。 $1 < p < e$ をみたす実数 p に対し、曲線 C 上の点 $P(p, \log p)$ における接線を l とし、 l の方程式を $y = ax + b$ とする。ただし、 $\log x$ は自然対数とし、 e は自然対数の底とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) a を p の式で表しなさい。
- (2) b を p の式で表しなさい。
- (3) x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれた図形 D_1 の面積を p の式で表しなさい。
- (4) x 軸と y 軸および直線 l で囲まれた図形を D_2 とする。 D_1 の面積と D_2 の面積が等しいとき、 p の値を求めなさい。

第 5 問

n を自然数とし,

$$h(x) = x - n \log x$$

とおく。ただし, $\log x$ は自然対数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $x \geq 2n$ のとき, $h'(x) \geq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示しなさい。ただし, $h'(x)$ は $h(x)$ の導関数とする。
- (2) $x \geq 2n$ のとき, $h(x) - h(2n) \geq \frac{1}{2}(x - 2n)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) $x \geq 2n$ かつ $x \geq 2n - 2h(2n)$ のとき, $h(x) \geq 0$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) (3) を利用して $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0$ が成り立つことを示しなさい。ただし, e は自然対数の底とする。

第 6 問

p, q, r を整数とし, 数列

$$a_n = pn^3 + qn^2 + rn \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

- (1) $p + r = q = 0$ のとき, すべての自然数 n に対し a_n は 6 の倍数であることを示しなさい。
- (2) q が 3 の倍数でないとき, $a_2 - 2a_1$ は 6 の倍数ではないことを示しなさい。
- (3) a_1 と a_2 がともに 6 の倍数であれば, すべての自然数 n に対し a_n は 6 の倍数であることを示しなさい。