

前期

理系

2016 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 曲線 $y = \log x$ を C で表す。 $1 < p < e$ をみたす実数 p に対し、曲線 C 上の点 $P(p, \log p)$ における接線を l とし、 l の方程式を $y = ax + b$ とする。ただし、 $\log x$ は自然対数とし、 e は自然対数の底とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) a を p の式で表しなさい。
- (2) b を p の式で表しなさい。
- (3) x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれた図形 D_1 の面積を p の式で表しなさい。
- (4) x 軸と y 軸および直線 l で囲まれた図形を D_2 とする。 D_1 の面積と D_2 の面積が等しいとき、 p の値を求めなさい。

2 n を自然数とし、

$$h(x) = x - n \log x$$

とおく。ただし、 $\log x$ は自然対数とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $x \geq 2n$ のとき、 $h'(x) \geq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示しなさい。ただし、 $h'(x)$ は $h(x)$ の導関数とする。
- (2) $x \geq 2n$ のとき、 $h(x) - h(2n) \geq \frac{1}{2}(x - 2n)$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) $x \geq 2n$ かつ $x \geq 2n - 2h(2n)$ のとき、 $h(x) \geq 0$ が成り立つことを示しなさい。
- (4) (3) を利用して $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0$ が成り立つことを示しなさい。ただし、 e は自然対数の底とする。

3 p, q, r を整数とし, 数列

$$a_n = pn^3 + qn^2 + rn \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

- (1) $p + r = q = 0$ のとき, すべての自然数 n に対し a_n は 6 の倍数であることを示しなさい。
- (2) q が 3 の倍数でないとき, $a_2 - 2a_1$ は 6 の倍数ではないことを示しなさい。
- (3) a_1 と a_2 がともに 6 の倍数であれば, すべての自然数 n に対し a_n は 6 の倍数であることを示しなさい。

