

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2015 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

点 O を中心とする半径 1 の円に内接している正六角形 $ABCDEF$ がある。 A, B, C, D, E, F, O の 7 点から異なる 3 点を同時に選ぶとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 選んだ 3 点が一直線上に並ぶ確率を求めなさい。
- (2) 選んだ 3 点を結ぶと正三角形ができる確率を求めなさい。
- (3) 選んだ 3 点を結ぶと面積が $\frac{\sqrt{3}}{3}$ より大きい三角形ができる確率を求めなさい。

第 2 問

関数

$$f(x) = \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x - \sin 2x$$

に対して、以下の問いに答えなさい。

- (1) $t = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくとき、 $f(x)$ を t の式で表しなさい。
- (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = a$ が $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で相異なる 2 つの解をもつための実数 a の条件を求めなさい。

第 3 問

座標平面において曲線 $y = \frac{3}{x^2 + 3}$ を C_1 , 曲線 $y = x^2 + k$ (k は定数) を C_2 とする。
 C_1 と C_2 のすべての共有点において互いの接線が直交しているとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 定数 k の値を求めなさい。また, C_1 と C_2 のすべての共有点の座標を求めなさい。
- (2) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めなさい。

第 4 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 次の不定積分を求めなさい。

$$\int e^{-2x} \cos 2x \, dx$$

- (2) n を正の整数とする。曲線

$$y = e^{-x} \sin x \quad ((n-1)\pi \leq x \leq n\pi)$$

と x 軸で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_n を求めなさい。

- (3) (2) で求めた V_n に対して, $\sum_{n=1}^{\infty} V_{2n-1} = V_1 + V_3 + V_5 + \cdots$ を求めなさい。

第 5 問

座標空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 2)$, $B(3, -1, 2)$ がある。三角形 OAB の周上または内部の点 P は $AP = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$ を満たしているとする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 P の座標を求めなさい。
- (2) 三角形 OBP の面積を求めなさい。
- (3) 点 Q が点 A を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の球面上を動くとき、点 B から直線 OQ に引いた垂線の長さの最小値を求めなさい。

第 6 問

座標平面において楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ を C とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) C に接する傾き m の直線の方程式をすべて求めなさい。
- (2) すべての辺が C に接する長方形の 1 辺の傾きが m であるとする。この長方形の面積 $S(m)$ を求めなさい。
- (3) m がすべての実数を動くとき、(2) で求めた $S(m)$ の最大値を求めなさい。