

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2014 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

s, t, u を実数, i を虚数単位とし, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。方程式

$$f(x) = x^4 + sx^3 - tx^2 + ux + 1 = 0$$

が ω を解にもつとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $-t = s + 1, u = s$ であることを示しなさい。
- (2) $f(\omega^2) = 0$ であることを示しなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が ω, ω^2 と異なる解 α を 2 重解にもつような s と α の組 (s, α) をすべて求めなさい。

第 2 問

2 次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ についての条件

$$(*) \quad a = d \text{ かつ } b = -c$$

を考える。 $(*)$ を満たす M に対して、実数 $f(M)$ を $f(M) = \sqrt{a^2 + b^2}$ と定める。以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 次正方行列 A, B がともに $(*)$ を満たすならば、積 AB も $(*)$ を満たすことを証明しなさい。
- (2) 2 次正方行列 A, B がともに $(*)$ を満たすならば、 $f(AB) = f(A)f(B)$ が成り立つことを証明しなさい。
- (3) $A = 16 \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ に対して $f(A^n)$ が十進法で 10 けた以上となる自然数 n のうち最小のものを求めなさい。ただし、本問においては $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

第 3 問

$f(x) = xe^{-x}$, $t > 1$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{t}$ のすべての交点の座標を求めなさい。
- (2) (1) のような $y = f(x)$ と $y = \frac{x}{t}$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (3) t が 1 より大きい実数全体を動くとき, 関数 $g(t) = \frac{t}{\log t}(1 - S(t))$ の最小値を求めなさい。

第 4 問

xy 平面上で x 座標と y 座標がともに自然数であるような点 (m, n) の各々に, 自然数 $a(m, n)$ が割り当てられている。 $a(1, 1) = 1$ であり, すべての m, n に対して次の規則が成り立っているとする。

$$\begin{aligned}a(m+1, n) &= a(m, n) + m + n \\a(m, n+1) &= a(m, n) + m + n - 1\end{aligned}$$

このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $a(1, 3)$ および $a(2, 2)$ の値を求めなさい。
- (2) 各々の自然数 n に対して $a_n = a(n, n)$ とおいて数列 $\{a_n\}$ を定めるとき, a_{n+1} を a_n と n の式で表しなさい。
- (3) a_{100} の値を求めなさい。

第 5 問

空間内の 4 点 O, A, B, C について, どの 3 点も同一直線上にはないとする。また, 正の実数 a, b は $\sqrt{2}a < b < 2a$ を満たすとし, $OA = OB = OC = a$, $AB = BC = CA = b$ とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 三角形 OAB は鈍角三角形であることを示しなさい。
- (2) 線分 OA, OB, OC 上 (ただし, 端点を除く) にそれぞれ点 A', B', C' があり, 三角形 $A'B'C'$ は正三角形であるとする。このとき, 直線 AB と直線 $A'B'$ は平行であることを示しなさい。

第 6 問

xy 平面において、 x 軸の正の部分に中心 A をもつ半径 1 の円 C が、直線 $y = x \tan t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) に点 P で接している。以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 A と点 P の x 座標を求めなさい。
- (2) x 軸の正の部分と円 C と直線 $y = x \tan t$ で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転した立体の体積 $V(t)$ を求めなさい。
- (3) 極限值 $\lim_{t \rightarrow +0} tV(t)$ を求めなさい。