

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2013 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ とする。点 $P(1, 1, 0)$ を通り, $\vec{a}$ に平行な直線を l_1 とし, 点 $Q(0, 0, 1)$ を通り, $\vec{b}$ に平行な直線を l_2 とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) l_1 上の点 R と l_2 上の点 S を通る直線 l_3 が, l_1 と l_2 に垂直であるとする。このとき, R, S の座標を求めなさい。
- (2) l_1 上の 2 点 E, F が $EF = 2$ を満たしながら動き, l_2 上を点 G が動くとき, $\triangle EFG$ の面積の最小値を求めなさい。

第 2 問

A, B, P を実数を成分とする 2 次の正方行列とする。 P は逆行列をもち、 $P^{-1}AP$ の (1, 2) 成分と (2, 1) 成分は 0 となるものとする。 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とおく。以下の問いに答えなさい。

(1) $a_1 \neq a_2$ かつ $AB = BA$ が成り立つとき、 $b_2 = b_3 = 0$ であることを示しなさい。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき、 a_1, a_2, c の値を求めなさい。

(3) A, P を (2) で与えた行列とし、 $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。正の整数 m, n に対し、 $(A^m + B^m)^n$ を求めなさい。

第 3 問

原点を O とする座標平面で、関数 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) のグラフを C とする。また、 $t > 1$ を満たす実数 t に対し、直線 $x + y = t$ と C との交点を P 、直線 $x + y = t$ と x 軸との交点を Q とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 PQ の長さ $f(t)$ を求めなさい。
- (2) 次の極限值を求めなさい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k(t-1)}{n}\right) \frac{t-1}{\sqrt{2}n}$$

- (3) 線分 OP 、 x 軸および C で囲まれる図形の面積を S とする。 S を用いて点 P の座標を表しなさい。

第 4 問

1 から 10 までの番号が 1 つずつ重複せずに書かれた 10 枚のカードがあり、左から小さい番号の順に横 1 列に並べてある。この中から、無作為に 2 枚のカードを選び、その場所を入れかえる操作を考える。 n を正の整数として、この操作を n 回行ったとき、左端にあるカードに書かれている番号が 1 である確率を p_n とする。以下の問いに答えなさい。ただし、答えのみでなく理由も述べなさい。

- (1) p_1 を求めなさい。
- (2) n 回目の操作のあと、1 が書かれたカードが左端になく、 $(n+1)$ 回目の操作のあとに 1 が書かれたカードが左端にある確率を q_n とするとき、 q_n を p_n を用いて表しなさい。
- (3) p_{n+1} と p_n の間に成り立つ関係式を求めなさい。
- (4) p_n を n を用いて表しなさい。

第 5 問

実数 a に対し

$$I = \int_0^1 |xe^x - a| dx$$

とする。以下の問いに答えなさい。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) $0 < a < e$ のとき、 $te^t = a$ を満たす実数 t ($0 < t < 1$) がただ 1 つ存在することを示しなさい。
- (2) $0 < a < e$ のとき、 I の値を (1) の t を用いて表しなさい。
- (3) a がすべての実数を動くとき、 I の値を最小にする a とそのときの I の値を求めなさい。

第 6 問

a, b は $a < b$ を満たす実数とする。正の整数 n に対し、座標平面上の $(2^n + 1)$ 個の点

$$P_k \left(a + \frac{k(b-a)}{2^n}, \left\{ a + \frac{k(b-a)}{2^n} \right\}^2 \right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2^n)$$

を考える。 X_n を $P_0, P_1, \dots, P_{2^n}, P_0$ をこの順に結んで得られる $(2^n + 1)$ 角形とし、 X_n の面積を S_n とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) S_1 を求めなさい。
- (2) $S_2 - S_1, S_3 - S_2$ を求めなさい。
- (3) S_n を求めなさい。