

前期

理系

2013 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科      75 分 〕

答 案 用 紙      3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。  
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   |   | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | X |

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。  
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。





**1** 1 から 10 までの番号が 1 つずつ重複せずに書かれた 10 枚のカードがあり、左から小さい番号の順に横 1 列に並べてある。この中から、無作為に 2 枚のカードを選び、その場所を入れかえる操作を考える。 $n$  を正の整数として、この操作を  $n$  回行ったとき、左端にあるカードに書かれている番号が 1 である確率を  $p_n$  とする。以下の問いに答えなさい。ただし、答えのみでなく理由も述べなさい。

- (1)  $p_1$  を求めなさい。
- (2)  $n$  回目の操作のあと、1 が書かれたカードが左端になく、 $(n+1)$  回目の操作のあとに 1 が書かれたカードが左端にある確率を  $q_n$  とするとき、 $q_n$  を  $p_n$  を用いて表しなさい。
- (3)  $p_{n+1}$  と  $p_n$  の間に成り立つ関係式を求めなさい。
- (4)  $p_n$  を  $n$  を用いて表しなさい。

**2** 実数  $a$  に対し

$$I = \int_0^1 |xe^x - a| dx$$

とする。以下の問いに答えなさい。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

- (1)  $0 < a < e$  のとき、 $te^t = a$  を満たす実数  $t$  ( $0 < t < 1$ ) がただ 1 つ存在することを示しなさい。
- (2)  $0 < a < e$  のとき、 $I$  の値を (1) の  $t$  を用いて表しなさい。
- (3)  $a$  がすべての実数を動くとき、 $I$  の値を最小にする  $a$  とそのときの  $I$  の値を求めなさい。

**3**  $a, b$  は  $a < b$  を満たす実数とする。正の整数  $n$  に対し、座標平面上の  $(2^n + 1)$  個の点

$$P_k \left( a + \frac{k(b-a)}{2^n}, \left\{ a + \frac{k(b-a)}{2^n} \right\}^2 \right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2^n)$$

を考える。 $X_n$  を  $P_0, P_1, \dots, P_{2^n}, P_0$  をこの順に結んで得られる  $(2^n + 1)$  角形とし、 $X_n$  の面積を  $S_n$  とする。以下の問いに答えなさい。

- (1)  $S_1$  を求めなさい。
- (2)  $S_2 - S_1, S_3 - S_2$  を求めなさい。
- (3)  $S_n$  を求めなさい。





