

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2012年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

e は自然対数の底とする。 $f(x) = x \log x$ ($x > 0$, $\log x$ は x の自然対数) とおく。 $t > e$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における接線の傾きが $\log t$ となる時, A の x 座標 $a(t)$ を求めなさい。
- (2) $x \geq 1$ の範囲において, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a(t)$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (3) $t \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{S(t)}{t^p \log t}$ が 0 でない値に収束するような正の定数 p の値を求めなさい。また, そのときの $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t^p \log t}$ を求めなさい。

第 2 問

原点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(1, 1, 1)$ を通る直線を l とし, 3 点 $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 3)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\vec{a}$ は平面 α に垂直で, 成分がすべて正であり, 長さが 7 になるものとする。このとき, $\vec{a}$ を成分で表しなさい。
- (2) $\triangle BCD$ の面積を求めなさい。
- (3) O から平面 α へ引いた垂線と平面 α との交点を H とする。線分 OH の長さを求めなさい。
- (4) P は座標がすべて正である直線 l 上の点とする。 P を中心とする半径 7 の球面が点 Q で平面 α に接するとき, P, Q の座標を求めなさい。

第 3 問

A は 2 次正方行列とし、 E , O はそれぞれ A と同じ型の単位行列, 零行列とする。 A は kE (k は実数) の形でなく, $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たす。以下の問いに答えなさい。ただし, n は自然数とする。

- (1) $A^3 = aA + bE$ を満たす実数 a , b を求めなさい。
- (2) $A^n = a_nA + b_nE$ を満たす実数 a_n , b_n を求めなさい。
- (3) A^n の逆行列が $xA + yE$ (x , y は実数) と表せるとき, x , y を求めなさい。

第 4 問

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上の点 $P(x_0, y_0)$ ($0 < x_0 < a, y_0 > 0$) における接線と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ A, B とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\frac{x_0^2}{a^2} = t$ とおくとき, 線分 AB の長さ $\overline{AB}$ を a, b, t を用いて表しなさい。
- (2) $0 < x_0 < a$ における $\overline{AB}$ の最小値を求めなさい。また, そのときの P の座標を求めなさい。

第 5 問

n を正の整数とし、 $n^2 + 3$ と $n + 1$ の最大公約数を d_n とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 を求めなさい。
- (2) $(n^2 + 3) - (n - 1)(n + 1) = 4$ を用いて、 d_n は 1, 2, 4 のいずれかであることを示しなさい。
- (3) $\sum_{n=1}^{610} d_n$ を求めなさい。
- (4) 次の極限値を求めなさい。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k d_n$$

第 6 問

P は正 n 角形 ($n \geq 6$) とする。以下の問いに答えなさい。ただし、答えのみでなく、理由も述べなさい。

- (1) P の異なる 2 本の対角線の組で、 P の頂点を共有するものは何通りあるか求めなさい。
- (2) P の異なる 2 本の対角線の組で、 P の頂点以外の点を共有するものは何通りあるか求めなさい。
- (3) P の異なる 2 本の対角線の組で、共有点を持たないものは何通りあるか求めなさい。