

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2011 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$f(x) = \log x - 2x + 1$ ($x > 0$) とする。 a を正の定数とし、 t は $0 < t < a$ をみたす実数とする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上に 3 点 Q, A, P を、それぞれの x 座標が $a - t$, a , $a + t$ となるようにとる。以下の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。
- (2) 点 R が $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AR}$ を満たすとき、 $\overrightarrow{AR}$ を求めなさい。
- (3) 四角形 APRQ の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (4) $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)}{t^3}$ を求めなさい。

第 2 問

座標空間の 3 点 $A(1, 2, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, 4, 2)$ を通る平面を α とする。点 $D(0, 2, 1)$ を通り、ベクトル $\vec{a} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を l_1 とする。また点 D を通り、ベクトル $\vec{b} = (-1, -1, 1)$ に平行な直線を l_2 とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) l_1 と α の交点を E とし、 l_2 と α の交点を F とする。 E, F の座標を求めなさい。
- (2) $\vec{DE}$ と $\vec{DF}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおくと、 $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (3) $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。

第 3 問

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のすべての成分は正であるとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) t の 2 次方程式

$$t^2 - (a + d)t + ad - bc = 0 \quad \dots\dots(*)$$

が異なる 2 つの実数解をもつことを示し、また、大きい方の解は正であることを示しなさい。

- (2) $(*)$ の大きい方の解を $t = \beta$ と表す。実数 y で、

$$(A - \beta E) \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすものを求めなさい。ただし、 E は 2 次の単位行列とする。

- (3) (2) で求めた y が正であることを示しなさい。

第 4 問

a を実数とする。関数 $f(x) = \sin x + a \cos^2 x - \frac{1}{4}$ について、以下の問いに答えなさい。

- (1) $a = 1$ とするとき、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減と極値を調べて、 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。
- (2) $f(x)$ の極値をあたえる x が $0 < x < \pi$ の範囲に 1 個だけ存在するための a についての必要十分条件を求めなさい。

第 5 問

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする。

$$\begin{cases} a_1 = 4, b_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_n - 3b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4$ を求めなさい。
- (2) $a_{n+4} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $b_{n+4} - b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はともに 5 の倍数であることを証明しなさい。
- (3) a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) も b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) も 5 の倍数ではないことを証明しなさい。

第 6 問

以下の問いに答えなさい。ただし、答えのみでなく、理由も述べなさい。

- (1) 赤、白、黒の玉がそれぞれ 3 個ずつあり、一列に並べるものとする。合計 9 個の玉の並べ方は何通りあるか求めなさい。なお、同じ色の玉は区別しないものとする。
- (2) (1) の並べ方のうちで、先頭の 3 個の玉が同じ色であるか、末尾の 3 個の玉が同じ色であるか、少なくとも一方が成り立つ並べ方は何通りあるか求めなさい。
- (3) 空間において座標 (x, y, z) にある点 P を 1 回の操作で $(x+1, y, z)$, $(x, y+1, z)$, $(x, y, z+1)$ のいずれかを選んでその座標に移動させる。最初に $(0, 0, 0)$ にある点 P を、9 回の操作で $(3, 3, 3)$ に移動させる選び方のうち、 $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(0, 3, 3)$ のいずれも経由しないものは何通りあるか求めなさい。