

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2010 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えなさい。

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、 $P^{-1}AP$ を求めなさい。

(2) a を実数とし、 $T = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ としたとき、任意の自然数 n に対して、行列 T^n を求め、その理由も述べなさい。

(3) 任意の自然数 n に対して、行列 A^n を求めなさい。

第 2 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) s を $0 \leq s \leq \sqrt{2}$ を満たす実数とする。直線 $y = x$ と直線 $y = -x + \sqrt{2}s$ の交点を P とする。直線 $y = -x + \sqrt{2}s$ と曲線 $y = -x^2 + 2x$ の交点で x 座標が 1 以下である点を Q とし、 Q の x 座標を t とする。このとき、点 P と点 Q の距離および s を、 t を用いて表しなさい。
- (2) 直線 $y = x$ と曲線 $y = -x^2 + 2x$ で囲まれた図形を直線 $y = x$ のまわりに回転させてできる立体の体積を求めなさい。

第 3 問

整数の値をとる整数 n の関数 $f(n)$, $g(n)$ を

$$f(n) = \frac{1}{2}n(n+1), \quad g(n) = (-1)^n$$

で定め、その合成関数を $h(n) = g(f(n))$ とする。さらに、1 つのさいころを 4 回振って、出た目の数を順に j, k, l, m として $a = h(j)$, $b = h(k)$, $c = h(l)$, $d = h(m)$ とおき、関数

$$P(x) = ax^3 - 3bx^2 + 3cx - d$$

を考える。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して、 $h(n)$ の値を求めなさい。
- (2) $P(x)$ がある点で極値をとる関数になる確率を求めなさい。
- (3) $P(x)$ が点 $(1, P(1))$ を変曲点に持つ関数になる確率を求めなさい。
- (4) $P(x)$ が $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ を満たす関数になる確率を求めなさい。

第 4 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 任意の整数 m に対して、 m^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 になることを示しなさい。
- (2) 整数 a, b, c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たしているとする、積 ab は 12 で割り切れることを示しなさい。

第 5 問

長さ 2 の線分 AB を直径とする半円周を点 $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B$ で n 等分する。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 三角形 AP_kB の三辺の長さの和 $AP_k + P_kB + BA$ を $l_n(k)$ とおく。 $l_n(k)$ を求めなさい。

(2) 極限值 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n(1) + l_n(2) + \dots + l_n(n)}{n}$ を求めなさい。

第 6 問

同一平面上にない 4 点 O, A, B, C に対して, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。点 A, B, C を含む平面上に点 D をとる。このとき, 以下の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{OD} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ と表すとき, 実数 x, y, z が満たすべき条件を求めなさい。

(2) 4 点 A, B, C, D は四角形 $ABCD$ をなし, 次の条件

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{b} \perp \vec{c}, \quad \vec{c} \perp \vec{a},$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

を満たすとする。その辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とし, 四角形 $PQRS$ が長方形をなすとする。ただし, 四角形 $PQRS$ は四角形 $ABCD$ に含まれるものとする。このとき, x, y, z の値を求めなさい。